



Martti Hallipelto

Pohjasuhteiden epävarmuuden mallintaminen Kriging-menetelmällä

Diplomityö, joka on jätetty opinnäytteenä tarkastettavaksi
diplomi-insinöörin tutkintoa varten.

Espoossa 6.8.2018

Valvoja: Professori Leena Korkiala-Tanttu

Ohjaajat: DI Taavi Dettenborn, DI Ari Hartikainen

Tekijä Martti Hallipello

Työn nimi Pohjasuhteiden epävarmuuden mallintaminen Kriging-menetelmällä

Koulutusohjelma Master's Programme in Geoengineering

Pää-/sivuaine Georakentaminen

Koodi ENG23

Työn valvoja Professori Leena Korkiala-Tanttu

Työn ohjaaja(t) DI Taavi Dettenborn, DI Ari Hartikainen

Päivämäärä 6.8.2018

Sivumäärä 68

Kieli suomi

Tiivistelmä

Pohjatutkimuksista muodostetaan maaperämalli usein kolmioverkoilla ja pintoja interpoloidaan sen perusteella lineaarisesti. Geologiset prosessit ovat muodostaneet maa- ja kallioperän pinnat ja lineaariset sovitukset antavat harvoin hyvää mallia todellisuudesta, varsinkin mikäli pohjatutkimusten määrä on vähäinen. Pohjatutkimuksiin liittyy myös mittausmenetelmästä johtuvaa epävarmuutta, jota ei lineaarisilla pinnoilla pystytä helposti ottamaan huomioon.

Kriging on menetelmä, jossa interpolointiin käytetään tietoa muuttujan spatiaalisesta autokorrelaatiosta. Jatkuva interpolointipintaa muodostettaessa interpolointiin voidaan käyttää koko havaintojoukkoa. Menetelmällä saadaan myös tieto interpoloinnin epävarmuudesta.

Työssä tutkittiin Krigingin käyttöä esimerkkilaskuissa ja case-tutkimuksessa. Case-tutkimuksessa tutkittiin aluetta, joka koostui tiheään ja harvaan tutkituista osista. Alueesta mallinnettiin pohjatutkimuksista tehtyjen tulkintojen perusteella Krigingillä muodostettu maaperämalli. Mallia ja sen epävarmuutta hyödynnettiin kadun paalutuksen taloudellisen riskin arvioinnissa ja uusien pohjatutkimusten sijainnin optimoinnissa. Mallia myös verrattiin vastaavaan kolmioverkolla muodostettuun malliin.

Krigingillä voidaan muodostaa parempia ja luotettavampia maaperämalleja kolmioverkoihin verrattuna. Luotettavammat mallit näkyvät kustannussäästöinä pohjatutkimus- tai pohjarakennuskustannuksissa. Mallien epävarmuudella voidaan arvioida tiedon luotettavuutta ja simuloida haluttuja pohjarakennusratkaisuja ja arvioida mallinnukseen liittyvää taloudellista riskiä. Epävarmuudella voidaan myös kohdistaa täydentävät pohjatutkimukset optimaalisiin paikkoihin.

Avainsanat maaperämallinnus, tietomallinnus, pohjatutkimukset, epävarmuus, Kriging



Author Martti Hallipelto

Title of thesis Modelling subsurface uncertainty with Kriging method

Degree programme Master's Programme in Geoengineering

Major/minor Geoengineering

Code ENG23

Thesis supervisor Professor Leena Korkiala-Tanttu

Thesis advisor(s) M. Sc. Taavi Dettenborn, M. Sc. Ari Hartikainen

Date 6.8.2018

Number of pages 68

Language Finnish

Abstract

Subsurface models are usually modelled from ground investigations with triangular networks and surfaces are interpolated linearly based on triangulation. Geological processes have formed soil layer boundaries and bedrock surface and linear models rarely give good approximation of reality, especially with small amount of ground investigations. There is also uncertainty related to ground investigations, which is difficult to consider with linear models.

Kriging is a method, which uses the knowledge of variables spatial autocorrelation. Whole set of observations can be used when forming a continuous interpolation surface. Method also gives an estimate of uncertainty related to interpolation.

In this thesis, Kriging was used in example calculations and in a case study. Case study was an area with densely and sparsely investigated parts. From interpretations made from ground investigations a subsurface model was created using Kriging. The model was used in evaluating financial risk of piling of a street and in optimizing the location of new ground investigations. Also, the model was compared to an equivalent subsurface model created with triangulation.

Better and more reliable subsurface models can be created with Kriging compared to triangular networks. More reliable subsurface models eventually show in cost savings in ground investigations or in geotechnical construction work. Uncertainty gives an estimate of subsurface model's reliability and geotechnical construction work can be simulated and model related financial risk can be estimated. Also, additional ground investigations can be focused in optimal places based on model uncertainty.

Keywords subsurface modelling, information modelling, ground investigations, uncertainty, Kriging

Alkusanat

Työn aiheen valinta oli pitkä prosessi, joka alkoi kesällä 2017. Monien käänteiden kautta työ päädyttiin kirjoittamaan kevään ja kesän 2018 aikana Ramboll Finland Oy:n ja Aalto-yliopiston rahoituksella.

Työn ohjausryhmään kuuluivat:

- *Leena Korkiala-Tanttu, Aalto-yliopisto (työn valvoja)*
- *Taavi Dettenborn, Ramboll Finland Oy (työn ohjaaja)*
- *Ari Hartikainen, Ramboll Finland Oy (työn ohjaaja)*
- *Juha Forsman, Ramboll Finland Oy*

Suuri kiitos koko ohjausryhmälle työn mahdollistamisesta sekä hyvistä neuvoista työn aikana. Erityisen suuri kiitos Taaville, joka tutustutti minut ohjelmoinnin ja matematiikan ihmeelliseen maailmaan kesällä 2017 ja tuki pitkäjänteisesti aina työn aiheen pohtimisesta lähtien. Erityinen kiitos myös Arille hyvistä keskusteluista työn aikana.

Espoo 30.7.2018

Martti Hallipelto

Sisällysluettelo

Tiivistelmä	
Abstract	
Alkusanat	
Sisällysluettelo	1
Merkinnät	2
1 Johdanto	3
1.1 Työn tausta	3
1.2 Tutkimuksen tavoitteet ja raja	5
2 Maaperä ja pohjatutkimukset	6
2.1 Geologiset prosessit	6
2.2 Pohjatutkimukset	8
2.2.1 Yleistä	8
2.2.2 Kairaukset	8
2.2.3 Kairausten virhe	10
3 Menetelmät	13
3.1 Yksinkertaiset interpolointimenetelmät	13
3.1.1 Lähimmän naapurin interpolointi	13
3.1.2 Kolmioverkko	13
3.2 Spatiaalinen autokorrelaatio	15
3.2.1 Semivarianssi ja semivariogrammi	17
3.2.2 Kovarianssifunktiot ja kovarianssimatriisi	19
3.3 Yleistä Kriging-menetelmästä	20
3.4 Yksinkertainen Kriging	22
3.5 Ehdollinen satunnaisotos normaalijakautuneesta monimuuttujajoukosta	23
3.6 Ohjelmistot	27
4 Tutkimuksen suorittaminen	30
4.1 Mallin muodostus	30
4.2 Kairausten virhefunktio	31
4.3 Esimerkkilaskelma kaksikulotteisesta Kriging-mallinnuksesta	33
5 Case-tutkimus	41
5.1 Yleistä	41
5.2 Lähtötiedot	43
5.3 Mallintaminen	44
5.3.1 Kalliopinnan mallintaminen	44
5.3.2 Saven alapinnan mallintaminen	48
5.3.3 Täytön alapinta	49
5.4 Tulokset ja analysointi	49
5.4.1 Laskennan tulokset	49
5.4.2 Vertailu kolmioverkkoon	53
5.4.3 Taloudellinen riski	56
5.4.4 Lisäpohjatutkimusohjelma	59
6 Yhteenveto ja johtopäätökset	64
Lähdeluettelo	66

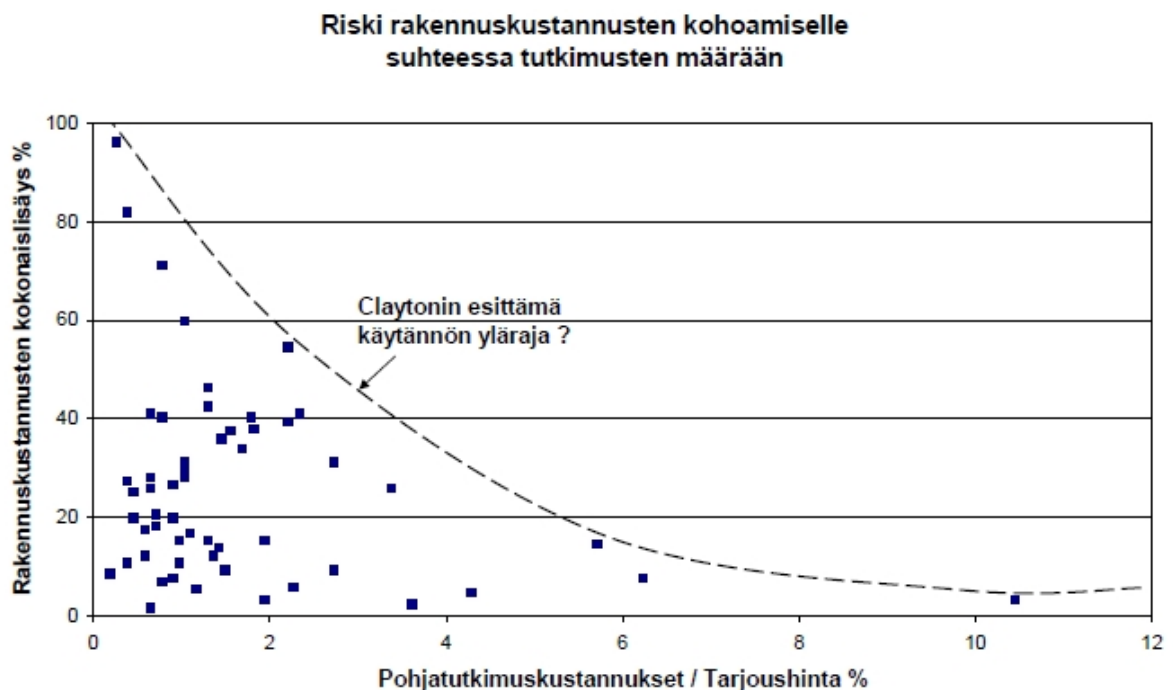
Merkinnät

A_{lue}		tarkastelualue
B		interpolointipisteen kovarianssimatriisi havaintojoukkoon nähden
L		Choleskyn hajotelman alakolmiomatriisi
P		havaintojoukkomatriisi
S		ehdollinen satunnaisotos
Y		osajoukoista koostuva lukujoukko
Y_i		joukon Y osajoukko
$Krig_var$		Kriging-varianssifunktio
$Z_e(x)$		todellista aineistoa kuvaava funktio
$Z'_e(x)$		estimaatti todellisesta funktiosta
c	$[kN/m^2]$	koheesio
cov		kovarianssifunktio
exp		eksponenttifunktio
$fmin$		minimointifunktio
h		etäisyys tai tarkasteluväli
l		pituuskaala (<i>lengthscale</i>)
m		joukon tunnettu keskiarvo
n		havaintojen lukumäärä
(x, y, z)		pistetiedon x , y ja z -koordinaatit
x_i		havainnon yksi tai kaksiulotteinen sijainti
z_i		havainnon arvo
Γ_h		välin h kokeellinen semivarianssi
Λ		painokerroinmatriisi
Σ_{ii}		joukon i kovarianssimatriisi
Σ_{ij}		joukkojen i ja j keskinäinen kovarianssimatriisi
$\Sigma_{1 2}$		ehdollinen kovarianssimatriisi
χ		satunnaislukumatriisi
γ	$[kN/m^3]$	tilavuuspaino
λ		painokerroin
$\mu_{1 2}$		ehdollinen keskiarvomatriisi
σ^2		varianssi
ϕ	$[^\circ]$	kitkakulma (leikkauskestävyyskulma)
A^T		transpoosi matriisista A
A^{-1}		inversio matriisista A
$ x_i - x_{i+h} ^2$		havaintojen neliöity etäisyys

1 Johdanto

1.1 Työn tausta

On arvioitu infrarakennusurakoiden suurimman taloudellisen ja teknisen riskin olevan maaperässä. Tehtyjen pohjatutkimusten määrä ei ole usein riittävä maaperän vaihtelevuuteen nähden. (Jaksa, 2005.) Clayton (2001) on esittänyt, että riski rakennuskustannusten kasvamisesta pienenee mitä enemmän pohjatutkimuksiin on käytetty taloudellisia resursseja. Pohjatutkimuskustannusten on arvioitu vaihtelevan projektista riippuen yleensä välillä 0,2-5 % rakentamiskustannuksista. Kuvassa 1 on esitetty tiehankkeissa pohjatutkimuskustannusten ja rakentamiskustannusylitysten suhde. (muokattu Clayton, 2001, viitattu lähteessä Tanttu, 2015.)



Kuva 1. Rakentamiskustannusylitysten ja pohjatutkimuskustannusten välinen suhde tiehankkeissa (muokattu Clayton, 2001, viitattu lähteessä Tanttu, 2015).

Riskiperusteinen suunnittelu on vaihtoehtoinen lähestymistapa geoteknisessä suunnittelussa. Se on todennäköisyyslaskentaan ja tilastolliseen analyysiin perustuva menetelmä. Merkittäviä epävarmuustekijöitä suunnitteluun liittyen ovat maaparametrien epävarmuus ja pohjatutkimusten luotettavuus. Riskiperusteisessa suunnittelussa usein pyritään selvittämään tilastollisin menetelmin maaperän geoteknisessä suunnittelussa käytettäviä parametreja ja pyrkiä selvittämään laskelmien avulla teoreettista riskiä. (Korkiala-Tanttu & Löfman, 2016.)

Geoteknisen suunnittelun taloudellinen riski on usein vahvasti sidoksissa maaperän kallio- ja maakerrosten rajapintojen sijainnin epävarmuuteen. Useissa pohjarakennusmenetelmissä kustannukset ovat riippuvaisia tiiviin maakerroksen, saven alapinnan tai kalliopinnan sijainnista. Tällaisia ovat esimerkiksi paalutus, massanvaihto, syvästabilointi ja kalliopintaan ulottuvat tukiseinät.

Pohjatutkimuksista tulkittuja maakerrosrajoja ja kalliopinnan tasoa mallinnetaan usein projekteissa lineaarisesti kolmiulotteisella kolmioverkolla. Kolmioverkko on interpolointime-

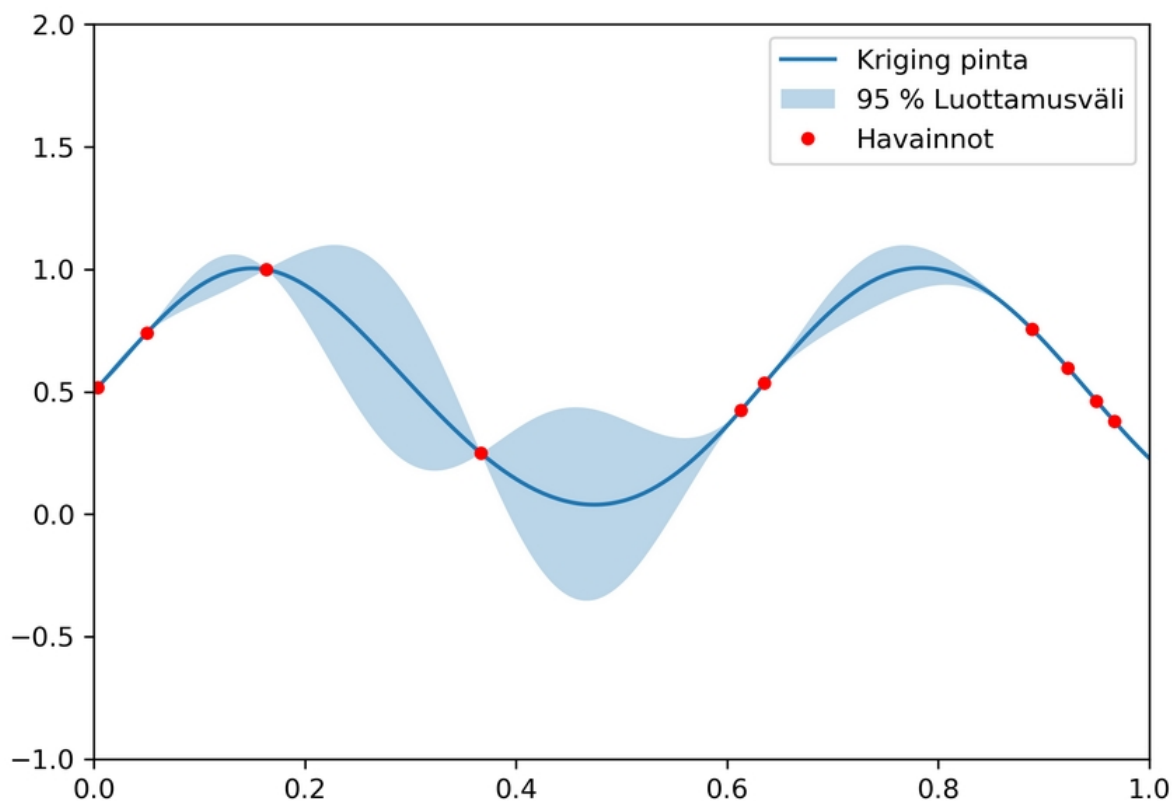
netelmänä varsin yksinkertainen, eikä se hyödynnä kaikkea maaperästä saatavilla olevia tietoja. Kolmioverkossa interpoloitava arvo lasketaan lineaarisesti kolmen lähellä olevan havainnon painotettuna keskiarvona.

Kehittyneemmillä interpolointimenetelmillä hyödynnetään interpoloinnissa useampaa arvoa. Näillä menetelmillä voidaan myös laskea havaintojen perusteella tehdyn interpolaation epävarmuus. Tätä voidaan soveltaa geoteknisessä suunnittelussa pohjasuhteiden epävarmuuteen, josta voidaan edelleen laskea siitä aiheutuva taloudellinen riski.

Tietomallinnusta käytetään Suomessa geoteknisessä suunnittelussa yhä enemmän. Tietoa on tähän asti hyödynnetty dokumenttipohjaisilla menetelmillä, jotka aiheuttavat lukuisia ongelmia liittyen esimerkiksi tiedon siirtämiseen ja hallintaan (Brotherus, 2014). Brotherus havaitsi inframallintamista tutkivan työnsä aikana, että pistemäisen pohjatutkimustiedon hyödyntäminen on maaperän pohjasuhteiden mallintamisessa ongelmallista. Riittävän varmuuden saaminen on hankalaa, erityisesti käytettäessä matemaattisesti yksinkertaisia pintojen interpolointimenetelmiä. Maaperämallien tarkkuutta voidaan parantaa kehittämällä geotekniseen suunnitteluun paremmin soveltuvia pintojen interpolointikeinoja.

Tanttu (2015) tutki työssään kalliopintamallin luotettavuutta porakonekairausten määrän ja laadun perusteella. Työssään Tanttu havaitsi, että kolmioverkot aiheuttavat kalliopinnan arvioituihin korkeustasoihin epätarkkuutta. Vaihtoehtoiseksi tavaksi kalliopinnan arvioimiseksi työssä on ehdotettu Kriging-menetelmää. Myös jatkotutkimustarpeissa on ehdotettu tutkimusta Kriging-menetelmän hyödyllisyydestä pintamallien muodostamisessa. Eteläsaari (2017) tutki työssään tietomallin hyödyntämistä tien painumalaskelmissa ja arvioi että Kriging-menetelmän hyödyntäminen pintojen mallintamisessa olisi kolmioverkkoa parempi tapa.

Kriging on menetelmä, jossa interpolointiin hyödynnetään koko aineistosta saatavaa tietoa. Siinä keskeistä on spatiaalisen autokorrelaation hyödyntäminen interpoloinnissa. Mitä vähemmän havaintojen arvot vaihtelevat, sitä todennäköisemmin lähellä olevien havaintojen arvot ovat lähellä toisiaan. Interpoloinnissa voidaan määrittää jokaiselle havainnolle painokerroin, jota hyödynnetään laskennassa. Kuvassa 2 on havainnollistettu Kriging-interpolointia. Menetelmä on monilla aloilla, kuten malmin etsinnässä, paljon hyödynnetty.



Kuva 2. Laskennallinen esimerkki Kriging-interpoloinnista. Interpoloinnissa voidaan hyödyntää koko käytettävissä olevaa aineistoa, sekä laskennallisesti arvioida interpoloinnin tarkkuutta.

1.2 Tutkimuksen tavoitteet ja rajaus

Työn tavoitteena on selvittää Kriging-menetelmän käyttöä ja hyödyllisyyttä geoteknisen suunnittelun sovelluksissa. Työssä keskitytään menetelmien hyödyntämiseen ja sovelluskohteisiin käytännönläheisestä näkökulmasta. Työssä pyritään kuvaamaan menetelmät niin, että erityisesti niiden hyödyllisyys ja syyt niiden hyödyntämiseen käyvät ilmi. Asiaa lähestytään esimerkkilaskelmien kautta. Case-tutkimuksessa aineistona käytetään todellista kohdetta, jonka suunnittelussa olisi mahdollista hyödyntää kehittyneempiä interpolointimenetelmiä. Kohde valittiin myös sillä perusteella, että aineisto olisi mahdollisimman hyvin käytettävissä ja menettelyä voitaisiin hyödyntää vastaavanlaisissa kohteissa.

Case-tutkimuksessa mallinnettiin kalliopintaa ja maaperän kerrosrajoja, sekä keskityttiin erityisesti niiden laskennalliseen epävarmuuteen. Mallinnuksessa käytettiin mahdollisimman paljon maaperästä saatavilla olevia tietoja, jotta laskennallista epävarmuutta pystyttiin pienentämään. Case-tutkimuksen aineistot ovat laajoja, mutta menettely ei merkittävästi poikkea pienemmille aineistoille.

Laajana omana kokonaisuutena työstä rajattiin pois pohjatutkimuksista määritettyjen maa-kerrosrajojen epävarmuuden tarkempi analysointi. Maaperästä tehtyjen tulkintojen kokonaisuus on niin laaja, että se päätettiin rajata työstä kokonaan pois. Pohjatutkimusten virheenä käytettiin kirjallisuusarvioiden ja muiden arvioiden mukaisia jakaumia. Työn laskelmissa ei myöskään analysoida geologisia muodostumia. Geologisella ammattitaidolla pystyttäisiin pienentämään työssä määritettyjä epävarmuuksia.

2 Maaperä ja pohjatutkimukset

Tässä luvussa esitetään maaperän muodostumia ja miten maaperämallin muodostamista varten pohjatutkimuksilla niitä pyritään tutkimaan. Maa- ja kallioperän muodostumisesta esitetään oleelliset geologiset prosessit. Pohjatutkimuksista kuvataan niiden tavoite geotekniikassa ja työn kannalta oleelliset pohjatutkimusmenetelmät. Pohjatutkimusmenetelmissä keskitytään niiden mittaustapaan ja pyritään selvittämään niistä muodostettujen tulkintojen tarkkuutta.

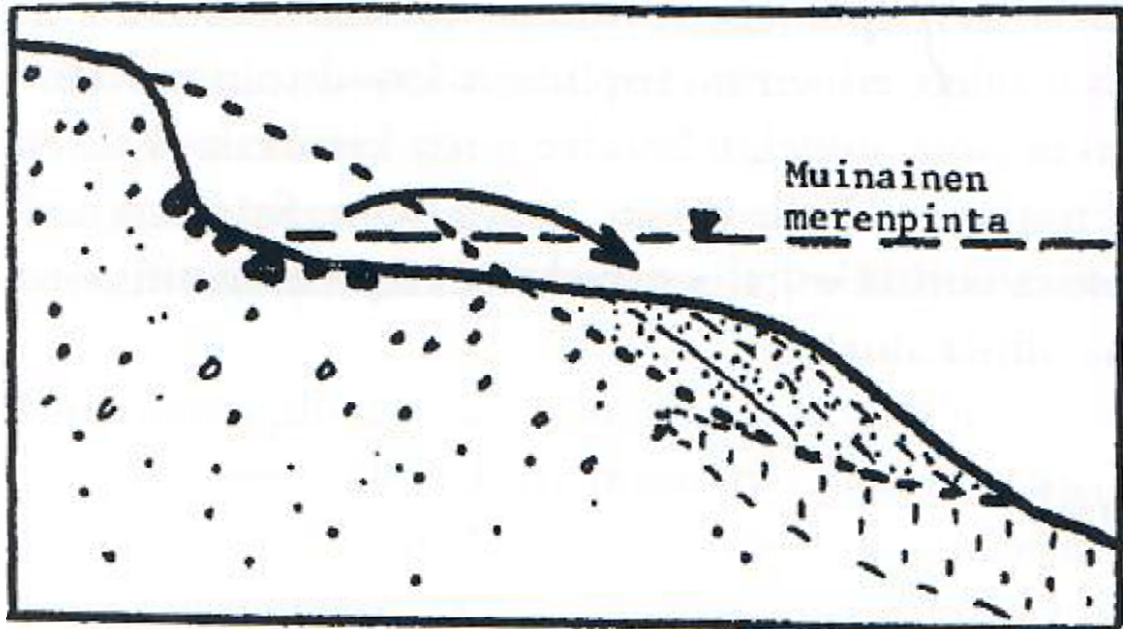
2.1 Geologiset prosessit

Suomen kallioperä kuuluu prekambriseen Pohjois- ja Itä-Euroopan peruskallioalueeseen, joka on yksi Euraasian mantereen vanhimmistä osista. Sen tärkeimmät kehitysvaiheet ovat tapahtuneet 2800–2700 ja 1900–1800 miljoonaa vuotta sitten. Tällöin kahdessa vuorijonomuodostustapahtumassa peruskallion ainekset erottuivat maan vaipasta ja muodostivat mannerkuorta. (Lehtinen et al., 1998.)

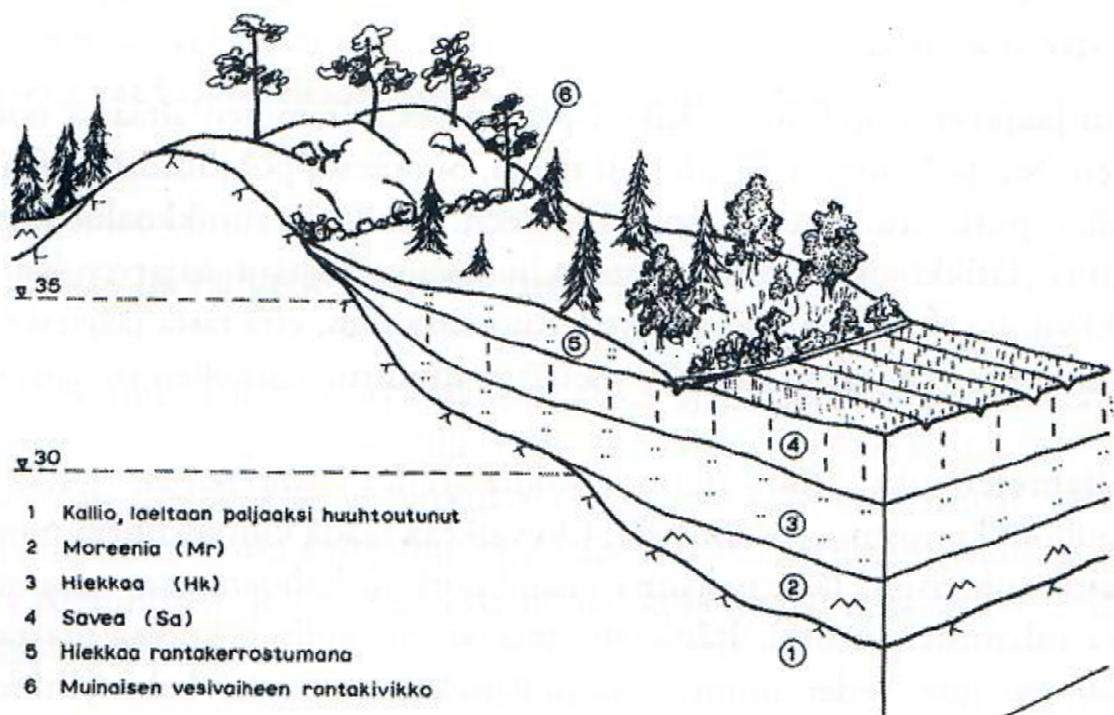
Suomen peruskallion muodostuminen katsotaan päättyneen 650 miljoonaa vuotta sitten. Tämän jälkeen kallioperä on ollut lähinnä rapautumisen ja aineen kerrostumisen kohteena. Nämä prosessit ovat vaikuttaneet kalliopinnan pintaosien piirteisiin, mutta ei sen rakenteeseen tai koostumukseen. Viimeisimmät merkittävät tapahtumat, jotka ovat aiheuttaneet rapautumista ja aineen kerrostumista on viime vuosimiljoonina toistuvasti Pohjois-Eurooppaa peittänyt mannerjäätikkö. Mannerjäätikkö on arvioiden mukaan kuluttanut kallioperää keskimäärin seitsemän metriä. (Lehtinen et al., 1998.)

Suomen maaperään on ratkaisevasti vaikuttanut jääkausien vaikutus. Maaperän keskimääräinen paksuus on noin seitsemän metriä ja havaintojen perusteella yleisin paksuus on 3–4 metriä. Siitä on erotettavissa ennen jääkautta syntyneet kerrostumat, matalaan veteen ja vesirajaan syntyneet rantamuodostumat ja vesirajan yläpuolelle syntyneet maalajit. Jäätikön muodostaneita maalajeja ja muodostumia ovat esimerkiksi pohjamoreeni, pintamoreeni, kumpumoreeni, reunamuodostumat, jäätikköjokiharjut ja lustosavet. (Jääskeläinen, 2009.)

Jäätiköiden jälkeisiin muodostumiin kuuluvat esimerkiksi rantamuodostumat. Ennen veden pinnan alla olleet mäet ovat huuhtoutuneet aallokossa vedenpinnan laskiessa. Kuvassa 3 on esitetty rantamuodostumien syntymisen periaate. Kuvassa 4 on esitetty tyypillinen Etelä-Suomessa esiintyvä rantamuodostuma. Muita jäätikön jälkeisiä muodostumia ovat postglasiaaliset savet, joki- ja tulvakerrostumat, tuulikerrostumat ja suot. (Jääskeläinen, 2009.)



Kuva 3. Rantamuodostuman syntyminen (Jääskeläinen, 2009).



Kuva 4. Rantamuodostuma Etelä-Suomessa (Jääskeläinen, 2009).

2.2 Pohjatutkimukset

2.2.1 Yleistä

Pohjatutkimuksien keskeisin tavoite on selvittää rakennuspaikan maaperäolosuhteet niin, että rakennusten tai rakenteen perustaminen ja pohjarakennustyöt voidaan luotettavasti suunnitella ja toteuttaa. Pohjatutkimuksilla pyritään usein selvittämään paikalla olevat maakerrokset, tutkimaan tiivistä pohjakerrosta tai kalliopintaa, sekä selvittämään pohjavedenpinnan sijaintia. Paaluperustuksia varten pitää pohjatutkimusten avulla pystyä arvioimaan paalujen upotussyvyyyksiä ja muita paalutukselle tarpeellisia tietoja. (Jääskeläinen, 2009.)

Pohjatutkimuksilla ja niiden tulkinnoilla tulee kyetä tuottamaan pohjarakennussuunnittelijalle geotekninen maaperämalli, jossa on maapinta, pohjavedenpinta ja maakerrosten tarpeelliset ominaisuudet sekä alla oleva kova pohja tai kallio. Pohjatutkimuksilla hankittujen tietojen perusteella on kyettävä laskemaan kantavuuslaskelmia, painumalaskelmia, maanpainelaskelmia ja muita tarpeellisia laskelmia. (Jääskeläinen, 2009.)

2.2.2 Kairaukset

Kuvassa 5 on esitetty yleisimmin käytössä olevat kairausmenetelmät sekä niiden ensisijainen ja toissijainen käyttötarkoitus. Kuvasta nähdään, että kallionpinnan määrittäminen luotettavasti voidaan tehdä vain porakonekairauksella. Toissijaisesti kalliopinta voidaan määrittää painokairauksella, heijarikairauksella ja tärykairauksella. Tiiviin pohjakerroksen sijainnin selvittämiseen voidaan tehdä paino-, heijari ja tärykairauksella. Toissijaisesti tiivis pohjakerros voidaan tunnistaa pora- ja puristinkairauksella. (Jääskeläinen, 2009.)

Kairausmenetelmän pääasiallinen käyttötarkoitus	●	Selvitettävä seikka	Kallionpinnan sijainti	Tiiviin pohjakerroksen sijainti	Tiiviydeltään erilaisten maakerrosten rajat	Maakerrosten lujuus likimäärin	Maakerrosten lujuus tarkasti	Maakerrosten tiiviyys likimäärin	Maalajiryhmä	Lyöntipaalupituuden arviointi
Kairausmenetelmän toissijainen käyttötarkoitus tai selvitetävän seikan selvitystarkkuus heikko	○									
Kairausmenetelmät										
Painokairaus			○	●	●	○		●	●	○
Heijarikairaus			○	●	○	○		●	○	●
Puristinkairaus				○	●	●		●	●	○
Siipikairaus							●			
Tärykairaus			○	●					○	○
Porakonekairaus			●	○						○

Kuva 5. Suomessa yleisten kairauksien pääasialliset ja toissijaiset käyttötarkoitukset (muokailtu Jääskeläinen, 2011, viitattu lähteessä Tanntu, 2015).

Puristin-heijarikairaus on Suomessa yleisesti käytettävä kairausmenetelmä, jossa yhdistyvät mekaaninen puristinkairaus ja heijarikairaus. Kairaus aloitetaan puristinkairauksena ja vaihdetaan heijarikairaukseen maksimipuristusvoiman saavuttamisen jälkeen. Kairauksen aikana kairatankoja pyöritetään vakionopeudella. Heijarivaiheessa heijaria pudotetaan vakiotaajuudella ja mikäli kokonaislyöntiluku 0,4 metrin matkalla on viisi tai vähemmän siirrytään takaisin puristinkairaukseen. (SGY, 2001.) Puristin-heijarikairauksen käyttötarkoitukseksi voidaan lukea kuvasta 5 kummankin kairauksen käyttötarkoituksia, riippuen kumman menetelmän osuutta käytetään.

Puristin-heijarikairaus tehdään usein raskailla monitoimikairoilla. 30 kN puristusvoiman saavuttamiseksi kairakoneen massan tulisi olla vähintään neljä tonnia. Kairan kärki on normaali kartion muotoinen kärki ja tangot ovat heijarikairan 32 mm umpitankoja. Kairauksen rekisteröintiin käytetään rekisteröintilaitetta, josta tiedot siirretään tietokoneelle jatkokäsittelyä varten. Laite mittaa puristusvoimaa 4-5 cm välein ja momenttia 20 cm välein. Heijariosuudella mitataan 20 cm matkalle tarvittavaa iskumäärää. (Jääskeläinen, 2009.)

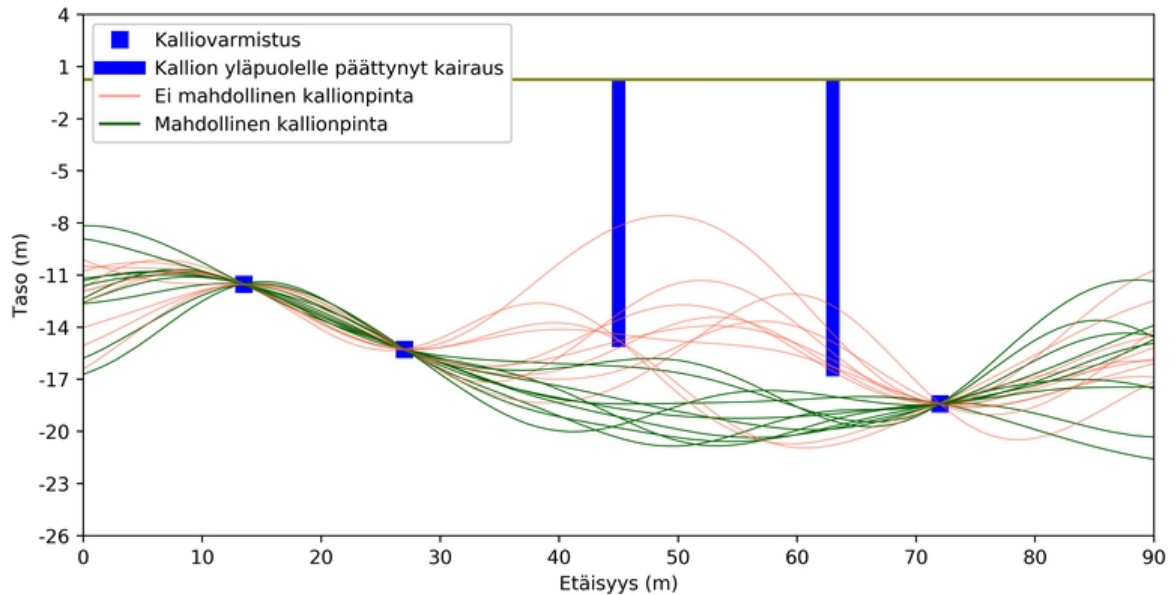
Painokaira on Suomessa yleisin käytetty kairausmenetelmä, joka antaa perustietoa maaperästä pehmeistä maakerroksista keskittiiviisiin moreeneihin saakka. Sen yleisyyttä voi selittää Suomen maaperän vaihtelevuus ja pienipiirteisyys, mikä vaatii tiheää pohjatutkimusväliä. Mikäli maaperä olisi homogeenisempaa voitaisiin pohjatutkimusten väliä harventaa ja suorittaa laadukkaampia selvityksiä. (Jääskeläinen, 2009.)

Painokairaus on kuormitustavaltaan staattinen menetelmä, jossa kairaa kuormitetaan erikoisilla painoilla sekä kierretään. Kairaa kuormitetaan pienimmällä mahdollisella painolla, jolla kaira tunkeutuu maahan kiertämättä. Jos kairauksen tunkeutumisnopeus näyttää kasvavan on kaira pysäytettävä ja haettava uudestaan pienin mahdollinen kuorma. Kun saavutetaan pienempi kuin 5 mm/s tunkeutumisnopeus yhden kN kuormituksella, aloitetaan kairan kiertäminen. Kun kaira on tunkeutunut 0.2 m, kirjataan tunkeutumaan tarvittu puolikierrosten lukumäärä. Mikäli kaira ei tunkeudu maahan kiertämällä, voidaan kairaa lyödä puu- tai muovinuijalla. (SGY, 1981)

Porakonekairaus on kairaustapa, jota käytetään ensisijaisesti kalliopinnan sijainnin selvittämiseen (Jääskeläinen, 2009). Kairaus on poraukseen perustuva kairaus, jossa kairaa pyöritetään ja isketään voimalla. Kairauksessa käytetään lisäksi ilma- tai vesihuuhtelua, jonka paineet vaihtelevat kaluston mukaan. Kairan tankojen paksuus ja pituus, kairan kärki ja käytettävät voimat, vaihtelevat kairakoneen mukaan. (SGY, 1986.)

Porakonekairauksella oletetaan kalliopinnan havainnot varmaksi, mikäli tunkeutumisnopeuden pieneneminen on äkillistä ja kalliopinnan saavuttamisen jälkeen kairausta on jatkettu vähintään kolme metriä. Suomen kallioperä on lujuusomaisuuksiltaan vaihtelevaa ja pintaosat saattavat olla rikkonaisia. Tällaisissa olosuhteissa porakonekairauksesta kallion toteaminen on epävarmaa, koska kalliota peittävän kitkamaan kairausvastus saattaa olla samaa luokkaa kuin alla olevan rikkonaisen kallion. (SGY, 1986.)

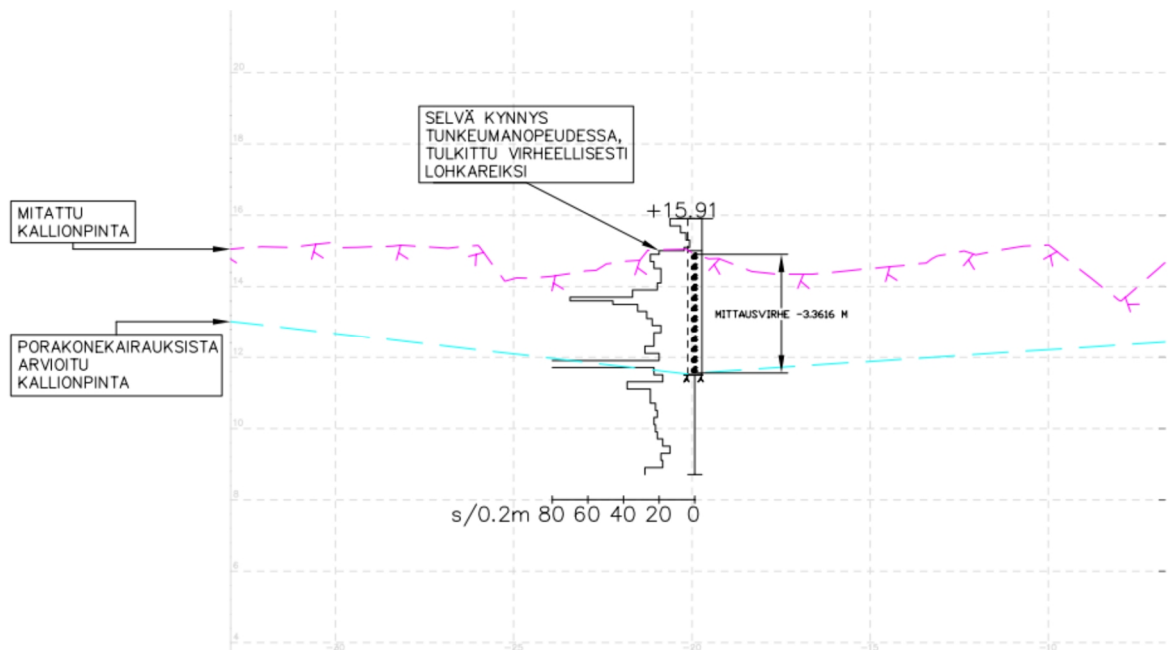
Kalliopinnan ja kerrosrajojen selvittämiseen on pääasialliset ja toissijaiset kairaukset. Mikäli pintoja käsitellään todennäköisyyksinä ja mallinnetaan pintoja kehittyneemmällä menetelmällä, voidaan kaikkia kairauksia hyödyntää laskentaan. Kuvassa 6 on esitetty menettely, jolla kaikkia kalliopinnan yläpuolelle päättyneitä kairauksia voidaan hyödyntää kalliopinnan mallintamiseen.



Kuva 6. Mahdollisia ja mahdottomia satunnaisia kalliopintoja. Kallion yläpuolelle päättyneillä kairauksilla voidaan rajata mahdottomia kalliopintoja pois.

2.2.3 Kairauksen virhe

Kairauksista määritettyjen pintojen ja kerrosrajojen epävarmuudesta on vähän tutkimusta. Usein geoteknisessä suunnittelussa oletetaan kairauksista määritetty kalliopinta ja maakerrosrajat mallinnuksessa tarkoiksi. On kuitenkin ilmeistä, että kairauksista tehtäessä ja kairauksia tulkitessa virheet ovat mahdollisia. Tulkinnalliset virheet voivat tapahtua kairauksia suorittaessa tai jälkeenpäin kairauksien tulkinnassa. Kuvassa 7 on esitetty eräs kairaus, jossa kairaaaja on tulkinnut kallioinnan virheellisesti lohkariksi, jolloin virhe todelliseen kalliointaan on yli 3 metriä (Tanttu, 2015).



Kuva 7. Porakonekairauksesta kairaaajan virheellisesti tulkitsema kalliopinta. (Tanttu, 2015).

Tanttu (2015) tutki työssään kalliopinnan luotettavuutta ja havaitsi, että porakonekairauksilla määritetty kalliopinta saattaa erota merkittävästi todellisesta kalliopinnasta. Työssä tutkittiin porakonekairauksilla määritetyn kalliopinnan tason eroa esiin kaivetun ja mitatun kalliopinnan tasoon. Työssä analysoitiin yhteensä yli 1000 porakonekairauksen pistettä. Pistteet olivat suhteellisen lähellä maanpintaa. Taulukossa 1 on esitetty työssä määritettyjen virheiden keskiarvo ja keskihajonta. Virheen keskiarvon negatiivinen arvo kuvaa kairauksen havainnon olevan syvemmällä kuin mitattu kalliopinta.

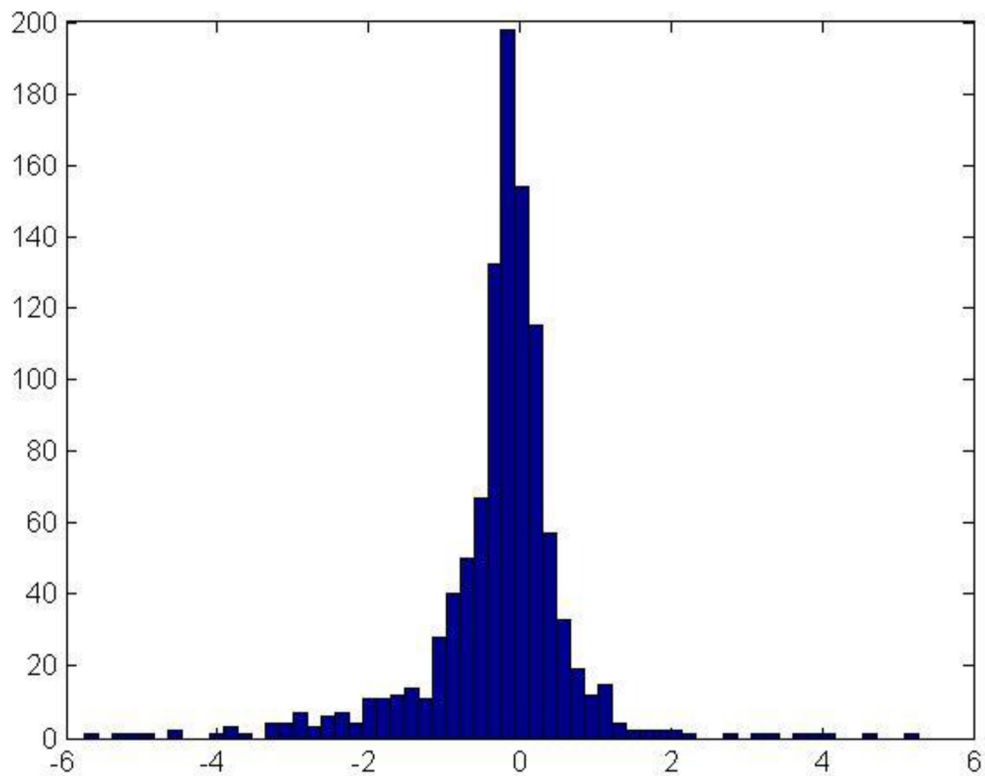
Taulukko 1. Eri kohteiden mitatun ja porakonekairausten perusteella arvioidun kalliopinnan välisen erotuksen keskiarvo ja keskihajonta. Keskiarvon negatiivinen arvo tarkoittaa kairauksen havainnon olevan syvemmällä kuin mitattu kalliopinta. (Tanttu, 2015)

Kohde	Aineiston koko	Kaikki aineisto		Yli 2 m poikkeava aineisto poistettu	
		Keskiarvo [m]	Keskihajonta [m]	Keskiarvo [m]	Keskihajonta [m]
Vt7 Koskenkylä-Kotka (KoLoKo)	1046	-0,230	0,899	-0,152	0,566
Vt8 Sepänkylän ohikulkutie	102	-0,465	0,999	-0,241	0,561
Kehä 3:n parantaminen välillä Vt4 – Vt7	56	0,048	0,296	0,048	0,296
Länsimetro, Urheilupuiston kaivanto	32	0,420	1,360	-0,099	0,854

Tanttu (2015) havaitsi myös, että kalliopintojen erotuksen virhe kasvaa kalliopinnan ja maanpinnan etäisyyden kasvaessa. Taulukossa 2 on esitetty kohteen Koloko porakonekairausten aineisto neljään osaan kairaus­syvyyden mukaan. Taulukosta huomataan, että syvyyden kasvaessa keskihajonta kasvaa selvästi. Kuvassa 8 on esitetty aineiston jakauma (Tanttu, 2015). Virhe on jossain määrin normaalijakauman mukainen.

Taulukko 2. Kohteen Koloko aineiston virhe jaoteltuna syvyyden mukaan. (Tanttu, 2015)

Syvyys [m]	Aineiston koko	Keskiarvo [m]	Keskihajonta [m]
0 – 1,99	564	-0,001	0,643
2 – 3,99	346	-0,337	0,826
4 – 5,99	124	-0,943	1,324
≥ 6	45	-1,407	1,663



Kuva 8. Kohteen Koloko porakonekairausten virheen histogrammi (Tanttu, 2015).

Tanttu (2015) arvioi työssään kalliopinnan virheen johtuvan mahdollisesti kairaajan virheellisestä tulkinnasta, tiedonsiirto- ja koordinaattivirheistä, sopimattoman kairauskaluston käytämisestä, kalliopinnan rapautuneisuudesta sekä kallion päällä olevien maakerrosten laadusta ja paksuudesta. Työn kohteissa on myös mahdollisesti tullut virhettä mitatussa kalliopinnassa, joka oletettiin analyysin takia tarkaksi.

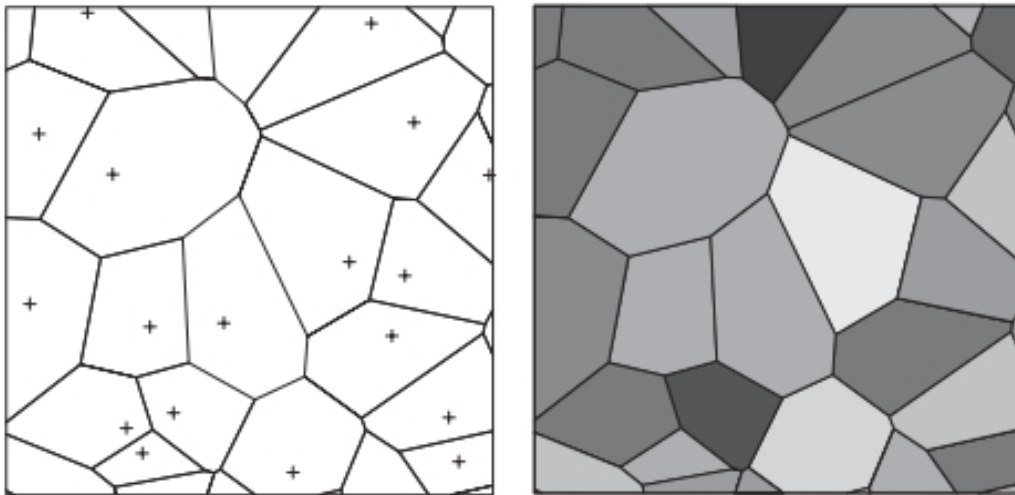
3 Menetelmät

Interpolaatio eli interpolointi tarkoittaa uusien arvojen laskemista tunnetuista arvoista. Tässä työssä yksinkertaisilla interpolointi menetelmillä tarkoitetaan menetelmiä, jotka käyttävät vain muutamaa havaintoa pisteen arvon interpoloimiseen. Yksinkertaisista interpolointimenetelmistä kuvataan lähimmän naapurin interpolointi ja kolmioverkko. Luvussa kuvataan, miten interpoloinnissa voidaan ottaa huomioon oletamus arvojen riippuvuudesta. Kriging kuvataan menetelmänä, sekä miten sillä lasketuista interpoloinneista voidaan ottaa ehdollinen otos.

3.1 Yksinkertaiset interpolointimenetelmät

3.1.1 Lähimmän naapurin interpolointi

Lähimmän naapurin interpolointi on ensimmäisiä ja yksinkertaisimpia interpolointimenetelmiä. Siinä interpoloitavan pisteen arvo määräytyy vain lähimmän näytepisteen mukaan. (Webster & Oliver, 2007.) Kuvassa 9 on esitetty lähimmän naapurin interpolointipinnan muodostaminen.



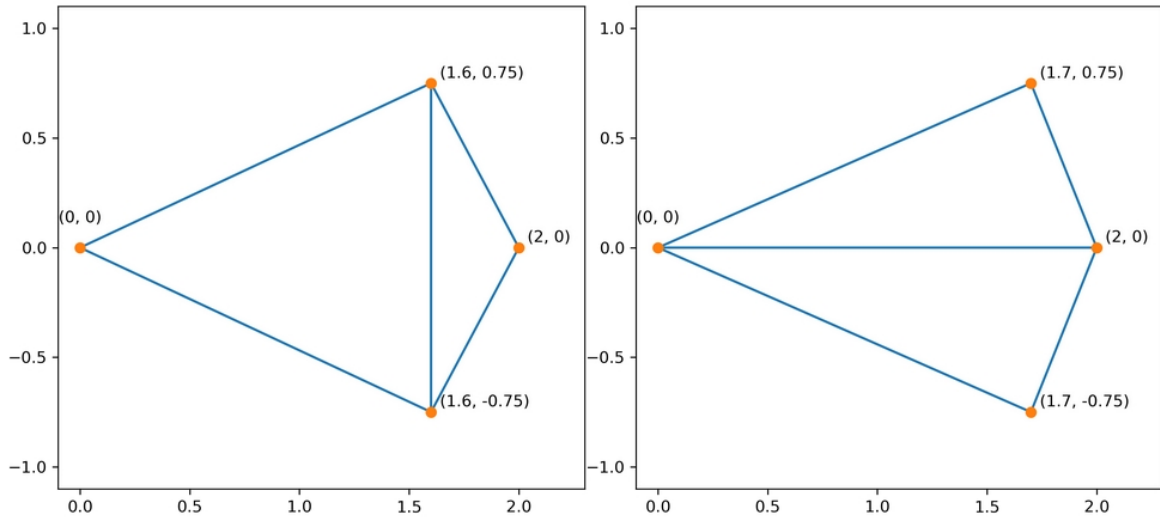
Kuva 9. Lähimmän naapurin interpolointipinnan muodostaminen. Havaintopisteet on merkitty vasemmassa kuvassa +-merkeillä. (Chilés, 2012)

Lähimmän naapurin interpoloinnin heikkoudet ovat ilmeisiä. Interpolointiin käytetään jokaisessa kohdassa vain yhtä arvoa, eikä muodostetusta pinnasta voida muodostaa arvioita pinnan epävarmuudesta. (Webster & Oliver, 2007.) Menetelmä on kuitenkin geotekniikassa yleisesti käytetty. Maaperästä tehtyjen havaintojen perusteella laskelmissa usein käytetään lähintä havaintoa. Esimerkiksi savialueella tehtävissä painuma- tai stabiliteettilaskelmissa usein käytetään lähintä mittausta saven leikkauslujuuden määrittämiseksi.

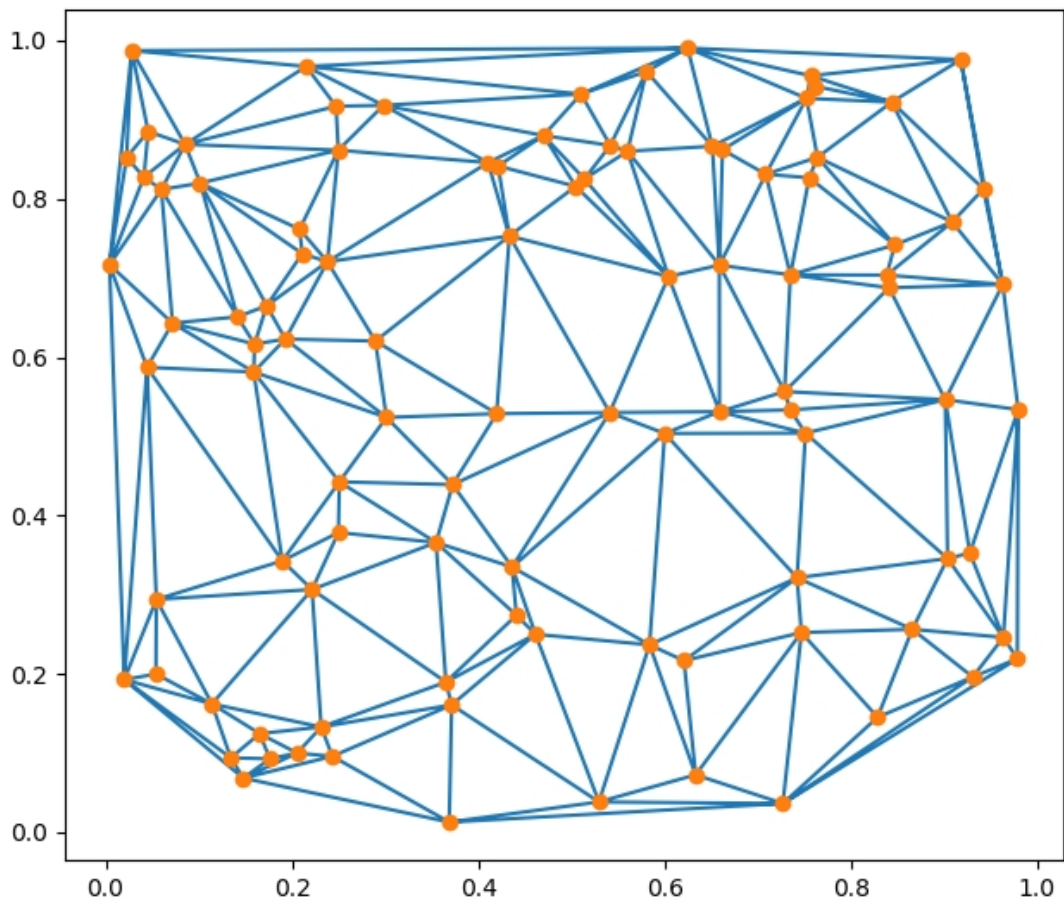
3.1.2 Kolmioverkko

Kolmioverkko on geoteknisessä suunnittelussa yleisesti pintojen muodostamiseen käytetty interpolointimenetelmä. Siinä muodostetaan havaintopisteistä kolmiulotteisia kolmioita, jolloin haluttu arvo saadaan kolmion sisällä kolmion muodostavista pisteistä. Muodostettaessa koko alueen havaintopisteistä kolmiot, kutsutaan muodostunutta pintaa kolmioverkoksi. Kolmion sisällä arvo lasketaan kolmion muodostavien pisteiden virittämän tason mukaan.

Lähes optimaalisia kolmioverkkoja kutsutaan Delaunay-kolmioverkkoiksi. Delaunay-kolmioverkossa kolmiot on muodostettu niin että kolmioiden kulmat ovat mahdollisimman saman suuruisia ja kolmioiden pisimmän sivun pituus on mahdollisimman lyhyt. Delaunay-kolmioverkkoja muodostavia algoritmeja on useita. (Davis, 2002.)



Kuva 10. Kaksi neljästä pisteestä muodostettua Delaunay-kolmioverkkoa. Delaunay-kolmioverkko maksimoi kolmioiden minimikulman.



Kuva 11. Matplotlib-moduulilla muodostettu 100 pisteen Delaunay-kolmioverkko.

Kolmioverkolla interpoloitaessa tunnetaan kolme pistettä tasolta. Yleinen piste (x, y, z) on tasolla, jos se toteuttaa kaavan 1. Laskettaessa tason arvoa pisteessä (x, y) on muuttuja z tuntematon, jolloin kaavasta saadaan ratkaistua kaava 2.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \end{vmatrix} = 0 \quad (1)$$

$$z = \frac{(-x_1y_2z_3 + x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 - x_2y_3z_1 - x_3y_1z_2 + x_3y_2z_1 - x_1y_3z_2 - x_1y_2z_3 + x_2y_3z_1 - x_2y_1z_3 + x_3y_2z_1 - x_3y_1z_2)}{x_1y_2 - x_1y_3 - x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 - x_3y_2} \quad (2)$$

missä, (x_1, y_1, z_1) on ensimmäinen tason virittävä piste
 (x_2, y_2, z_2) on toinen tason virittävä piste
 (x_3, y_3, z_3) on kolmas tason virittävä piste
 (x, y, z) on tuntematon piste

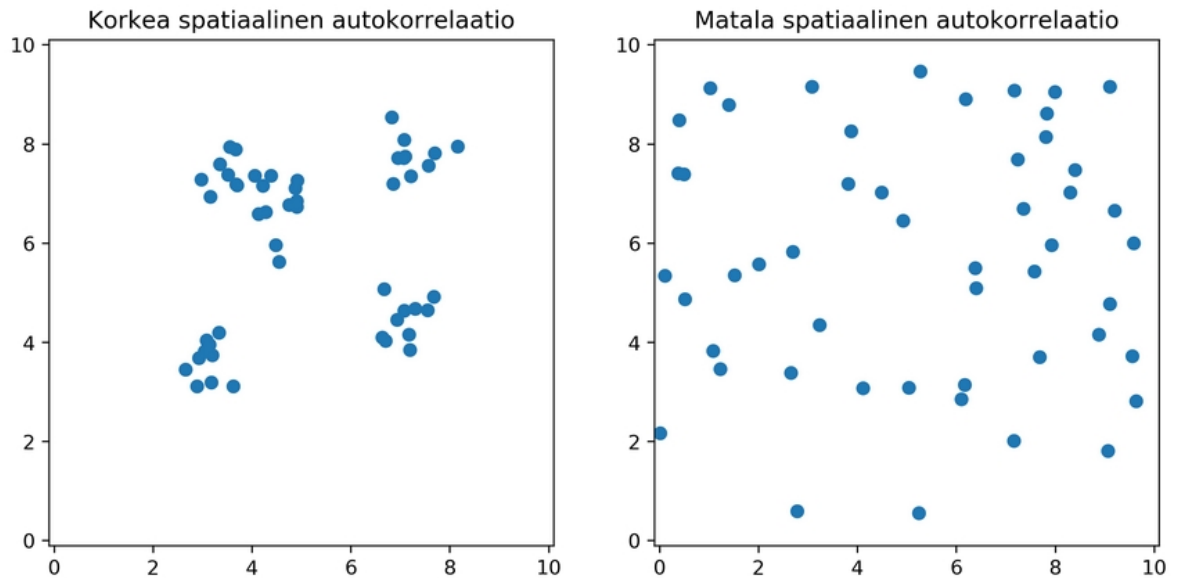
Delaunay-kolmiointi ja siitä lineaarinen interpolointi on menetelmänä usein parempi verrattuna lähimmän naapurin interpolointiin, sillä siinä käytetään kolmea havaintoa jatkuvan interpolointipinnan muodostamiseen. Menetelmällä ei kuitenkaan voida laskennallisesti tehdä arvioita pinnan epävarmuudesta.

Kolmioverkon pinnan epävarmuutta usein pyritään rajoittamaan rajaamalla kolmiot, joiden maksimisivunpituus ylittää määritetyn rajan, pois käytettävästä kolmioverkosta. Heikkoutena tässä menettelyssä on, että tällöin saatetaan rajata pois myös hyvin lähellä havaintoa olevia osia pinnasta. Pinta ei myöskään ole välttämättä jatkuva, vaan interpoloitavalla alueella on poistettujen kolmioiden johdosta aukkoja.

Yksinkertaiset interpolointimallit tarjoavat pinnaksi karkean arvion alueesta. Niillä ei kuitenkaan voida arvioida pintojen epävarmuutta, mikä olisi interpoloinnille toivottavaa. (Webster & Oliver, 2007) Niissä ei myöskään hyödynnetä havaintojen spatiaalista autokorrelaatiota parhaalla mahdollisella tavalla. Mikäli havaintojen perusteella huomataan, että tietyn etäisyyden jälkeen pisteet eivät enää korreloi, arvioiden tekeminen muuttuu haastavaksi.

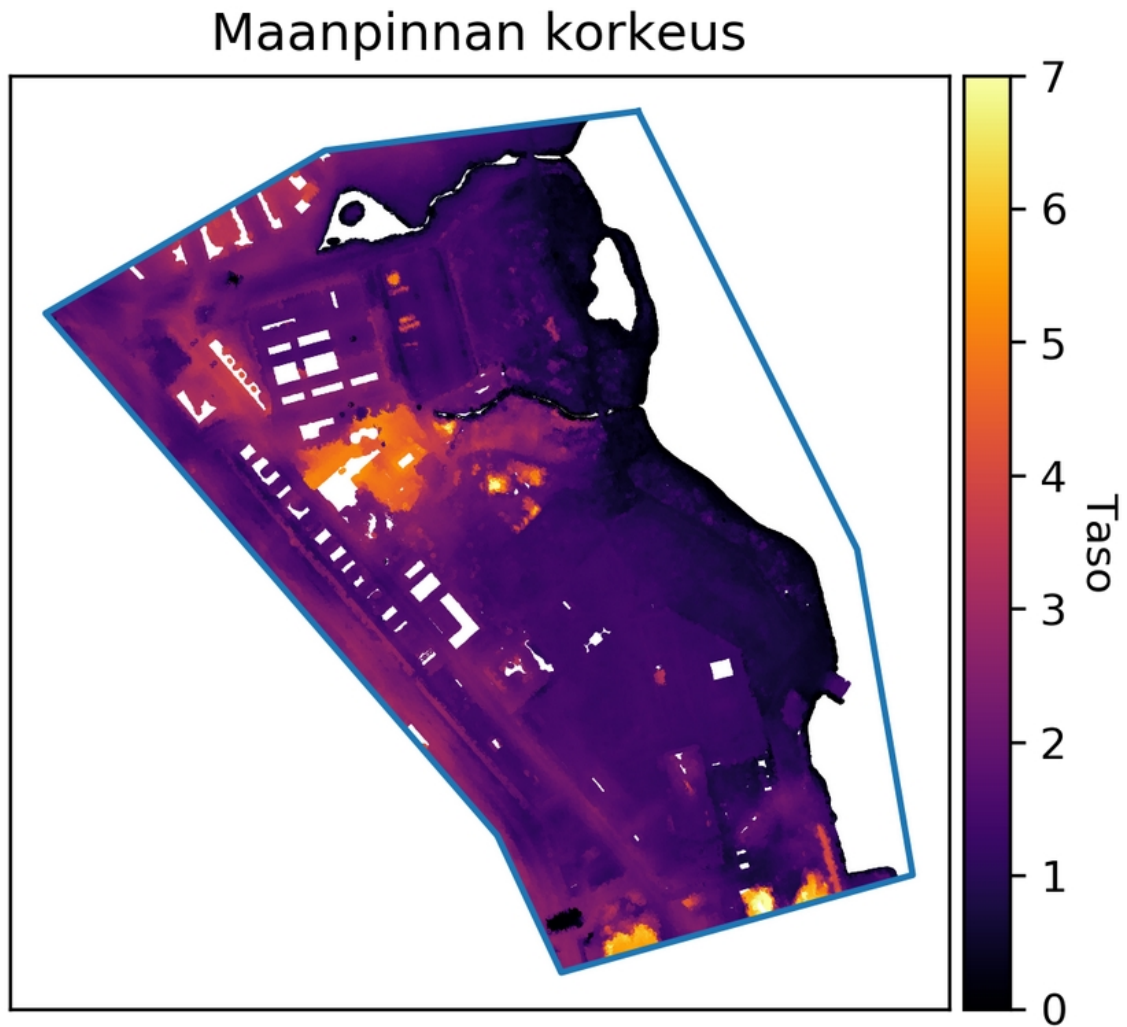
3.2 Spatiaalinen autokorrelaatio

Toblerin maantieteen ensimmäisen lain mukaan kaikki on riippuvaista kaikesta, mutta lähellä olevat asiat ovat enemmän riippuvaisia toisistaan (Tobler, 1970). Ilmiötä kutsutaan spatiaaliseksi riippuvuudeksi tai nykyään usein spatiaaliseksi autokorrelaatioksi. Spatiaalisella autokorrelaatiolla siis tarkoitetaan lähellä toisiaan olevien havaintojen välistä positiivista yhteyttä. (Webster & Oliver, 2007.) Kuvassa 12 on esitetty diskreetin muuttujan spatiaalisen autokorrelaation vaikutus muuttujan esiintymiseen.



Kuva 12. Diskreetissä tapauksessa korkea spatiaalinen autokorrelaatio tarkoittaa asian esiintymistä usein yhdessä. Spatiaalisen autokorrelaation ollessa matala, asian esiintyminen on satunnaisempaa.

Maan pinnan taso on usein vahvasti spatiaalisesti riippuvainen, kuten kuvasta 13 voidaan hahmottaa. Korkea maan pinnan taso tarkoittaa usein, että lähellä olevissa pisteissä pinnan taso on myös korkealla. Luonnollisten pintojen spatiaalinen riippuvuus johtuu niiden muodostumiseen liittyvistä geologisista prosesseista.



Kuva 13. Työssä käsiteltävän case-tutkimuksen laserkeilausaineiston taso (Helsinki, 2018). Maanpinnan taso on vahvasti spatiaalisesti autokorreloiva.

Geostatistiikassa spatiaalista korrelaatiota voidaan laskennallisesti arvioida semivariogrammeilla tai spatiaalisella autokovarianssilla. Geostatistiikassa spatiaalisen autokovarianssin käyttö on yleistynyt, sillä se on yleisesti tilastotieteessä riippuvuutta kuvaavaa arvo. Semivariogrammi on perinteisempi tapa kuvata spatiaalista vaihtelua, joka on alun perin kehitetty geostatistiikan työkaluksi. (Davis, 2002.)

3.2.1 Semivarianssi ja semivariogrammi

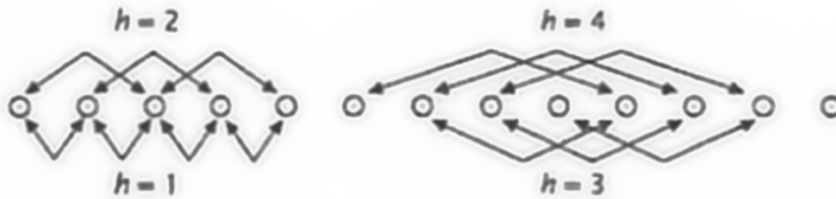
Semivarianssi kuvaa paikallisesti riippuvan muuttujan spatiaalista muutosnopeutta. Linjassa tasaisin välein olevan muuttujan yhden välin semivarianssi lasketaan kaavalla 3. (Davis, 2002.)

$$\Gamma_h = \sum_i^{n-h} (z_i - z_{i+h})^2 / 2n \quad (3)$$

missä

- Γ_h on välin h semivarianssi
- h on tarkasteluväli
- z_i on havainnon arvo
- z_{i+h} on toisen, etäisyydellä h havainnosta z_i , olevan havainnon arvo
- n on välin h arvojen määrä

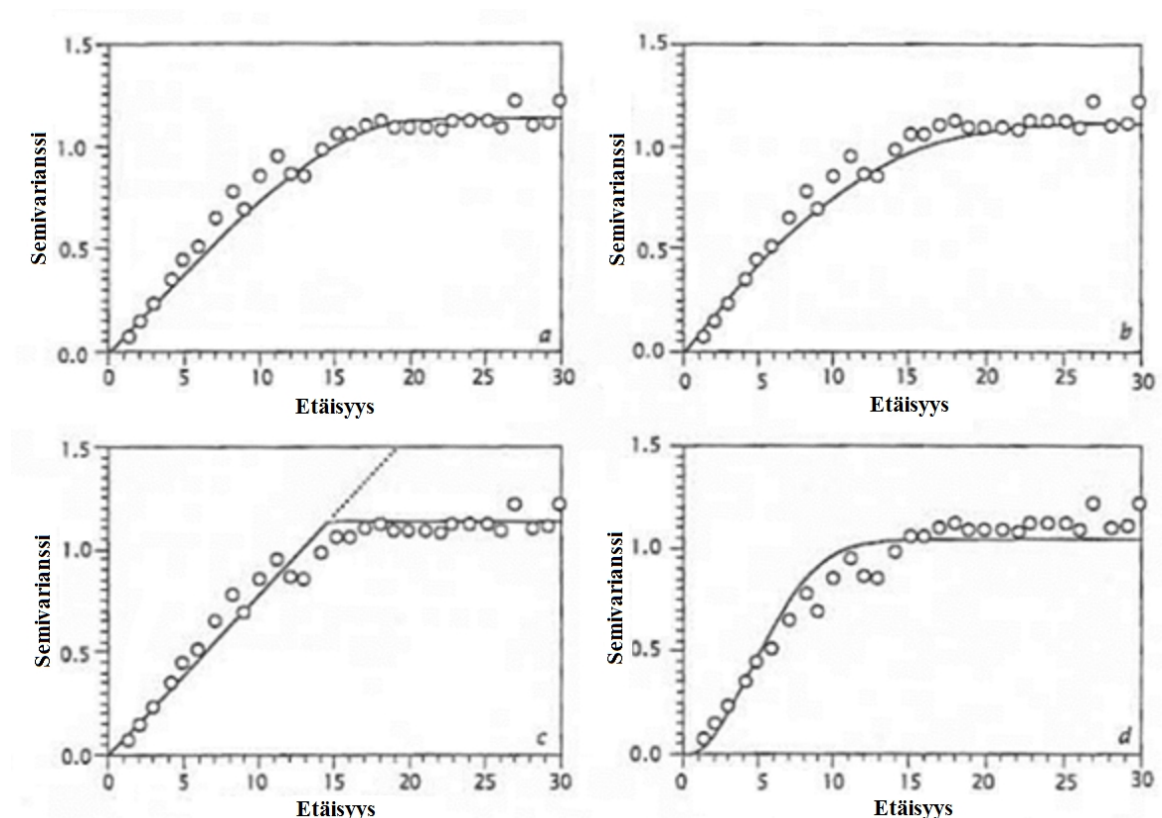
Semivarianssi lasketaan useille havaintojen etäisyyksille. Kuvassa 14 on kuvattu, miten havainnot valitaan linjassa olevien havaintojen eri h :n arvoille. Kaksiulotteisesti eri etäisyyksille jakautuneiden havaintojen semivarianssi lasketaan tietyille etäisyysväleille. Ensimmäinen väli on $0-h$ toinen $h-2h$ ja niin edelleen.



Kuva 14. Semivarianssi lasketaan usealle h :n arvolle. Linjassa olevilla arvoilla $h=1$ tarkoittaa vierekkäisiä arvoja, $h=2$ tarkoittaa kahden havainnon etäisyydellä toisistaan olevia havaintoja ja niin edelleen. (Davis, 2002.)

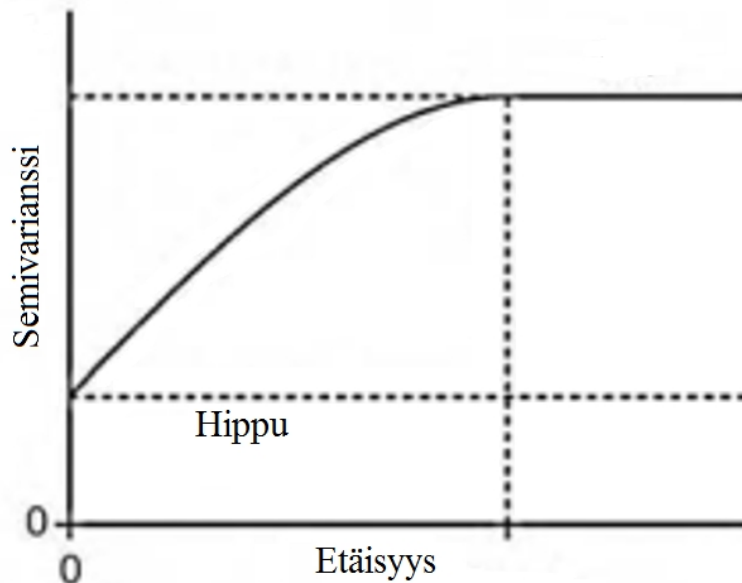
Piirtämällä kaavalla 3 lasketut arvot etäisyys-semivarianssi -kuvaajaan saadaan kokeellinen semivariogrammi. Tällä erotetaan termeinä teoreettinen semivariogrammi, joka kuvaa populaation todellista semivarianssia. Kuvassa 15 on esitetty kokeellinen semivariogrammi pisteinä jokaisessa kuvaajassa. Kokeellisen funktion perusteella sovitetaan kuvaan malli. (Davis, 2002.)

Populaation semivarianssia voidaan mallintaa useilla kokeelliseen semivariogrammiin sovitetuilla funktioilla. Yleisimmin käytettyjä funktioita ovat pallomainen (*spherical*), eksponentiaalinen, lineaarinen ja Gaussinen funktio (Davis, 2002). Kuvassa 15 on esitetty aineistoon sovitettuja kuvaajia.



Kuva 15. Aineistoon sovitettuja semivarianssimalleja. (a) pallomainen (*spherical*), (b) eksponentiaalinen, (c) lineaarinen ja (d) Gaussinen funktio. (Davis, 2002)

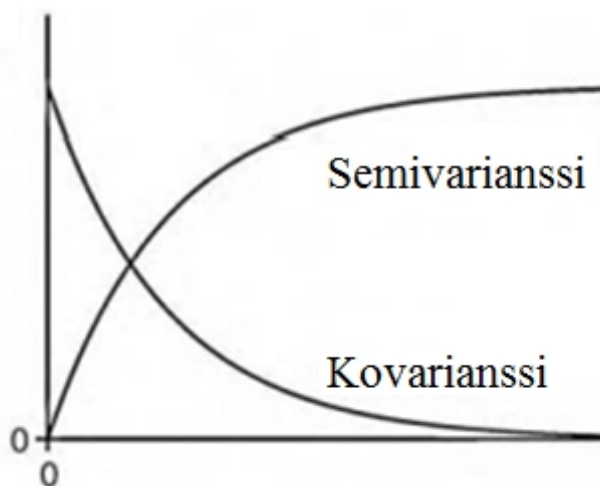
Mikäli aineiston perusteella siihen sovitettu kuvaaja leikkaa y-akselin eli semivarianssin, kutsutaan nollakohtaa hipuksi (*nugget*). Hippu saattaa johtua yllättävästä muutoksesta muuttujan vaihtelevuudessa etäisyyksillä, jotka ovat pienempiä kuin havaintojen väliset etäisyydet tai mittausvirheestä. (Hohn, 1999.) Kuvassa 16 on esitetty, kuinka hippu määritetään semivariogrammista.



Kuva 16. Hippu on sovitetun kokeellisen semivariogrammin leikkauskohta y-akselin kanssa. Hippu saattaa kuvata mittausvirhettä. (Webster & Oliver, 2007.)

3.2.2 Kovarianssifunktiot ja kovarianssimatriisi

Kovarianssi on vaihtoehtoinen tapa kuvata paikallisen muuttujan spatiaalista riippuvuutta. Kovarianssi on yleisemmin matematiikassa käytetty riippuvuuden mitta (Davis, 2002). Kovarianssi eroaa semivarianssista niin, että lähellä etäisyyden nollakohtaa positiivisesti riippuvan muuttujan kovarianssi on suuri ja se pienenee etäisyyden kasvaessa eli päinvastoin kuin semivarianssi. Kuvassa 17 on kuvattu semivarianssin ja kovarianssin yhteys.



Kuva 17. Kovarianssi pienenee positiivisesti alueellisesti riippuvan muuttujan etäisyyden kasvaessa, päinvastoin kuin semivarianssi (Webster & Oliver, 2007).

Kovarianssifunktio on funktio, joka kuvaa arvojen välistä riippuvuutta (Rasmussen & Williams, 2006). Kovarianssifunktioita on useita, joista luonnollisten ilmiöiden kuvaamiseen voidaan käyttää neliöityä eksponenttifunktiota (*squared exponential function*). Neliöity eksponenttifunktio vastaa käänteistä Gaussista funktiota semivarianssia kuvattaessa. Kaavassa 4 on esitetty neliöity eksponenttifunktio (Murphy, 2012).

$$\text{cov}(x_i, x_{i+h}) = \sigma^2 \exp\left(-\frac{|x_i - x_{i+h}|^2}{2 \cdot l^2}\right) \quad (4)$$

missä $\text{cov}(x_i, x_{i+h})$ on kovarianssifunktio
 x_i on havainnon i sijainti
 x_{i+h} on toisen havainnon sijainti
 $|x_i - x_{i+h}|^2$ on havaintojen neliöity etäisyys
 σ^2 on varianssi
 l on pituusskaala (*lengthscale*)

Neliöidyssä eksponentti kovarianssifunktiossa varianssi ja pituusskaala ovat aineiston pohjalta arvioitavia arvoja. Havaintojen etäisyyden ollessa nolla antaa funktio arvoksi varianssin. Pitkillä etäisyyksillä funktion arvo lähestyy nollaa.

Kovarianssimatriisi on matriisi, johon on koottu estimaattipisteiden tai havaintojen välinen kovarianssi, sekä havaintojen varianssi. Kovarianssimatriisin diagonaalilla on arvon varianssi. Kovarianssimatriisi on määritelty kaavan 5 mukaan. (Murphy, 2012.)

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{cov}(x_1, x_1) & \text{cov}(x_1, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_1, x_k) \\ \text{cov}(x_2, x_1) & \text{cov}(x_2, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_2, x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \text{cov}(x_k, x_1) & \text{cov}(x_k, x_2) & \cdots & \text{cov}(x_k, x_k) \end{bmatrix} \quad (5)$$

missä Σ on kovarianssimatriisi
 x_i on havainnon sijainti
 $\text{cov}(x_k, x_i)$ on kovarianssifunktio

3.3 Yleistä Kriging-menetelmästä

Kriging on interpolointimenetelmä, joka hyödyntää interpoloinnissa muuttujan paikallista riippuvuutta. Monia geologisia pintoja voidaan pitää muuttujina, jotka ovat paikallisesti riippuvaisia. Paikallista riippuvuutta kuvataan laskennallisesti monesti semivariogrammilla tai kovarianssifunktiolla. Paikallinen riippuvuus usein lasketaan havaintoaineistosta tai vaihtoehtoisesti käytetään ennalta tiedettyä tietoa muuttujasta. (Davis, 2002.)

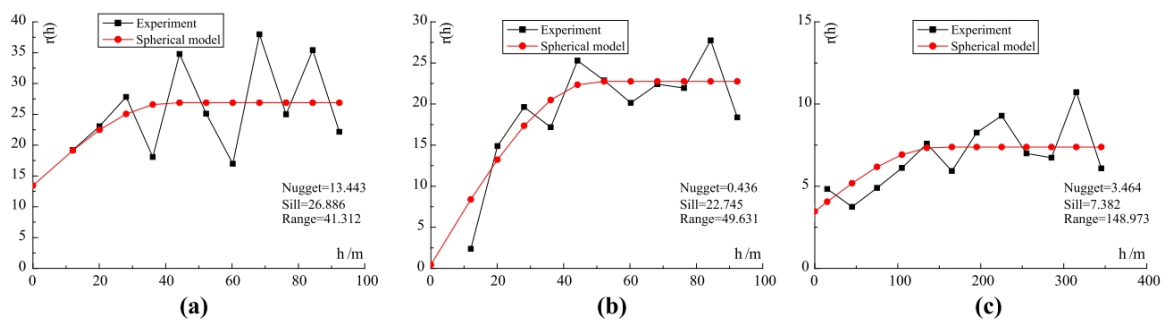
Kriging menetelmiä on useita (Chilés, 2012). Matemaattisesti kaikkein yksikertaisin on niin sanottu yksinkertainen Kriging (*simple Kriging*). Yksinkertainen Kriging perustuu oletukseen, että todellista aineistoa kuvaavan funktion keskiarvo, spatiaalinen autokovarianssia ja varianssi eivät ole riippuvaisia paikasta, sekä että aineiston keskiarvo on tunnettu. (Davis, 2002.)

Öljyn- ja malminetsinnässä, maaperätutkimuksessa, geologiassa ja muilla ympäristötieteen aloilla Kriging on paljon hyödynnetty interpolointimenetelmä. Menetelmistä on julkaistu

myös paljon alakohtaista kirjallisuutta ja tutkimusartikkeleja (Baveye & Laba, 2015). Kriging on nimetty Danie Krigen mukaan, joka hyödynsi kullan spatiaalista autokorrelaatiota esiintymien etsimisessä (Webster & Oliver, 2007).

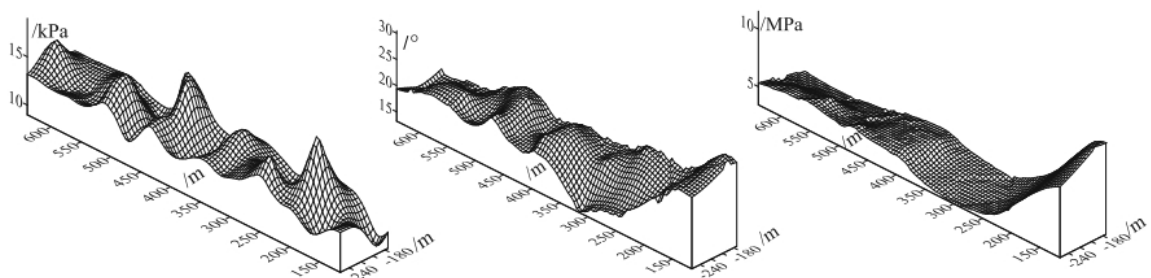
Useassa geotekniikan artikkelissa tai tutkimuksessa on hyödynnetty Krigingiä parametrien ja pohjatutkimustiedon interpolointiin (Altun, et al., 2013; Soulie, et al., 1990; Basarir, et al., 2010; Sitharam & Samui, 2007). Kairausten mittausdatan kuten kärkevaston interpoloinnissa on ongelmalliseksi usein muodostunut datan heikko spatiaalinen autokorrelaatio, sekä liian harva tutkimuspisteväli luotettavien korrelaatiomallien luomiseen (Sitharam & Samui, 2007).

Wang ja Zhu (2015) tutkivat artikkelissaan Kriging-menetelmien hyödyntämistä maaperästä määritettyjen parametrien estimoinnissa. Tutkimuksessa interpoloitiin laboratoriotutkimuksilla määritettyjä lujuusparametreja 42 tutkimuspisteessä. Interpoloitavat lujuus- ja muodonmuutosparametrit olivat: koheesio, kitkakulma ja puristusmoduuli. Tutkimuksessa vertailtiin eri Kriging-menetelmiä ja käytettiin myös parametrien keskinäistä korrelaatiota interpoloinnissa. Kuvassa 18 on esitetty parametreista määritetyt semivariogrammit.



Kuva 18. Kuvassa on esitetty määritetyt kokeelliset ja sovitetut semivariogrammit. Vasemmalla (a) koheesio, keskellä (b) kitkakulma ja oikealla (c) puristusmoduuli. (Wang & Zhu, 2015.)

Määritettyjen spatiaalisten korrelaatiomaalien pohjalta interpoloitiin parametreja tutkimusalueella, joka oli noin 60 metriä leveä ja 500 metriä pitkä alue. Vertailtavien Kriging mallien välillä oli tuloksissa isoja eroja. Kuvassa 19 on esitetty tavallisella Krigingillä (*ordinary Kriging*) interpoloitujen parametrien jakautuminen alueella.



Kuva 19. Krigingillä voidaan interpoloida maaperän lujuusparametreja. Kuvassa vasemmalla (a) koheesio, keskellä (b) kitkakulma ja oikealla (c) puristusmoduuli. (Wang & Zhu, 2015)

Kriging on menetelmänä geotekniikan sovelluksissa melko vähän käytetty. Lineaarinen interpolaatio ja kolmioverkko on pohjasuhteiden mallinnuksessa yleisin tapa niin tutkimuksessa kuin kaupallisissa projekteissa. Kolmiulotteinen mallinnus on yleistymässä geotekniikassa ja se avaa myös mahdollisuuksia käyttää kehittyneempiä interpolointimenetelmiä, niin visualisoinnissa kuin geoteknisessä laskennassa ja suunnittelussa.

3.4 Yksinkertainen Kriging

Yksinkertaisen Krigingin laskemista varten, merkitään todellista aineistoa kuvaamaan funktio $Z_e(x)$, jossa x on yksi- tai kaksiulotteinen sijainti. Havaintopisteet on numeroitu $x_1 \dots x_k$. Merkitään interpoloitava piste x_0 ja sen estimaatti $Z'_e(x_0)$. Matriisissa P on havaintopisteiden arvot, joka on esitetty kaavassa 6.

$$P = \begin{bmatrix} Z_e(x_1) \\ Z_e(x_2) \\ \vdots \\ Z_e(x_k) \end{bmatrix} \quad (6)$$

Määritellään kolme matriisiä; kovarianssimatriisi Σ_{22} , painokerroinmatriisi Λ ja matriisi B , joka määrittelee interpolointipisteen kovarianssin suhteessa havaintoihin. Matriisit on kuvattu kaavoissa 7, 8 ja 9. $cov(x_n, x_m)$ kuvaa kovarianssifunktion avulla laskettua kahden arvon välistä kovarianssia. m on aineiston tunnettu keskiarvo. Painokerroinmatriisi saadaan laskettua kaavalla 10 (Davis, 2002). Tällöin pisteen x_0 estimaatti saadaan laskettua kaavalla 11 (Davis, 2002). P^T on matriisin P transpoosi. Pisteen estimaatin varianssi saadaan laskettua kaavalla 12 (Davis, 2002).

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_i \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\Sigma_{22} = \begin{bmatrix} cov(x_1, x_1) & cov(x_1, x_2) & \dots & cov(x_1, x_k) \\ cov(x_2, x_1) & cov(x_2, x_2) & \dots & cov(x_2, x_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(x_k, x_1) & cov(x_k, x_2) & \dots & cov(x_k, x_k) \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$B = \begin{bmatrix} cov(x_0, x_1) \\ cov(x_0, x_2) \\ \vdots \\ cov(x_0, x_i) \end{bmatrix} \quad (9)$$

$$\Lambda = \Sigma_{22}^{-1}(B - m) \quad (10)$$

$$Z'_e(x_0) = m + P^T \Lambda = m + P^T \Sigma_{22}^{-1}(B - m) \quad (11)$$

$$\sigma^2(x_0) = cov(x_0, x_0) - B^T \Lambda = cov(x_0, x_0) - B^T \Sigma_{22}^{-1} B \quad (12)$$

missä Λ on painokerroinmatriisi
 λ_i on havainnon i painokerroin
 Σ_{22} on havaintojoukon kovarianssimatriisi
 $cov(x_k, x_i)$ on kovarianssifunktio

B on interpolointipisteen kovarianssimatriisi havaintojoukkoon nähden
 m joukon tunnettu keskiarvo
 $Z'_e(x_0)$ on todellisen funktion estimaatti pisteessä x_0
 P on havaintojoukkomatriisi

3.5 Ehdollinen satunnaisotos normaalijakautuneesta monimuuttujajoukosta

Interpolointipisteet ja havaintopisteet voidaan mieltää kahtena joukkona, jonka arvot on normaalijakautuneet. Merkitään interpolointipisteitä alaindeksillä 1 ja havaintopisteitä alaindeksillä 2. Kaavoissa 13, 14 ja 15 on esitetty normaalijakautuneen joukon Y osajoukot.

$$Y = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mu = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix} \quad (15)$$

missä Y on joukko
 Y_i on joukon Y osajoukko
 μ on joukon Y keskiarvomatriisi
 μ_i on osajoukon Y_i keskiarvomatriisi
 Σ on lohkomatriisi, joka koostuu osajoukkojen kovarianssimatriiseista
 Σ_{11} on interpolointipisteiden kovarianssimatriisi
 Σ_{22} on havaintojoukon kovarianssimatriisi
 Σ_{12} on interpolointipisteiden kovarianssimatriisi havaintojoukkoon nähden
 Σ_{21} on havaintojoukon kovarianssimatriisi interpolointipisteisiin nähden

Lohkomatriisin Σ osamatriisi Σ_{12} vastaa matriisin Σ_{21} transpoosia. Ehdollinen keskiarvo ja ehdollinen kovarianssimatriisi saadaan laskettua kaavoilla 16 ja 17 (Murphy, 2012).

$$\mu_{1|2} = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(Y_2 - \mu_2) \quad (16)$$

$$\Sigma_{1|2} = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21} \quad (17)$$

missä $\mu_{1|2}$ on ehdollinen keskiarvomatriisi
 $\Sigma_{1|2}$ on ehdollinen kovarianssimatriisi

Kaavat 16 ja 17 vastaavat lähes yksinkertaisen Krigingin kaavoja 11 ja 12, yleisesti tilastotieteessä ja matematiikassa käytettävillä notaatioilla. Erotuksena interpolointipisteet on koottu yhteen matriisiin, jolloin estimaattipisteiden laskenta tietokoneella nopeutuu. Erona on myös keskiarvo, joka on koottu matriisiin eikä tällöin ole välttämättä vakio tarkastelualueella. Satunnaisotoksen laskemista varten tarvitaan koko ehdollinen keskiarvojoukko $\mu_{1|2}$ ja kovarianssimatriisi $\Sigma_{1|2}$.

Satunnaisotoksen ottamista varten lasketaan kovarianssimatriisista Choleskyn hajotelma. Choleskyn hajotelma toteuttaa kaavan 18. Satunnaisotos saadaan laskettua kaavalla 19

(Murphy, 2012). Kaavassa χ on matriisi, jossa on kovarianssin rivien mukainen määrä toisistaan riippumattomia standardinormaalijakauman mukaisia satunnaislukuja. Standardinormaalijakauman keskiarvo on nolla ja varianssi yksi. Matriisi voidaan laskea esimerkiksi Pythonin Numpy-moduulilla (Numpy, 2018) tai Box-Muller menetelmällä (Murphy, 2012).

$$\Sigma = LL^T \quad (18)$$

$$S = L\chi + \mu_{1|2} \quad (19)$$

missä S on satunnaisotos
 χ on satunnaislukumatriisi, joka koostuu toisistaan riippumattomista satunnaisista standardinormaalijakauman mukaisista luvuista
 $\mu_{1|2}$ on ehdollinen keskiarvojoukko

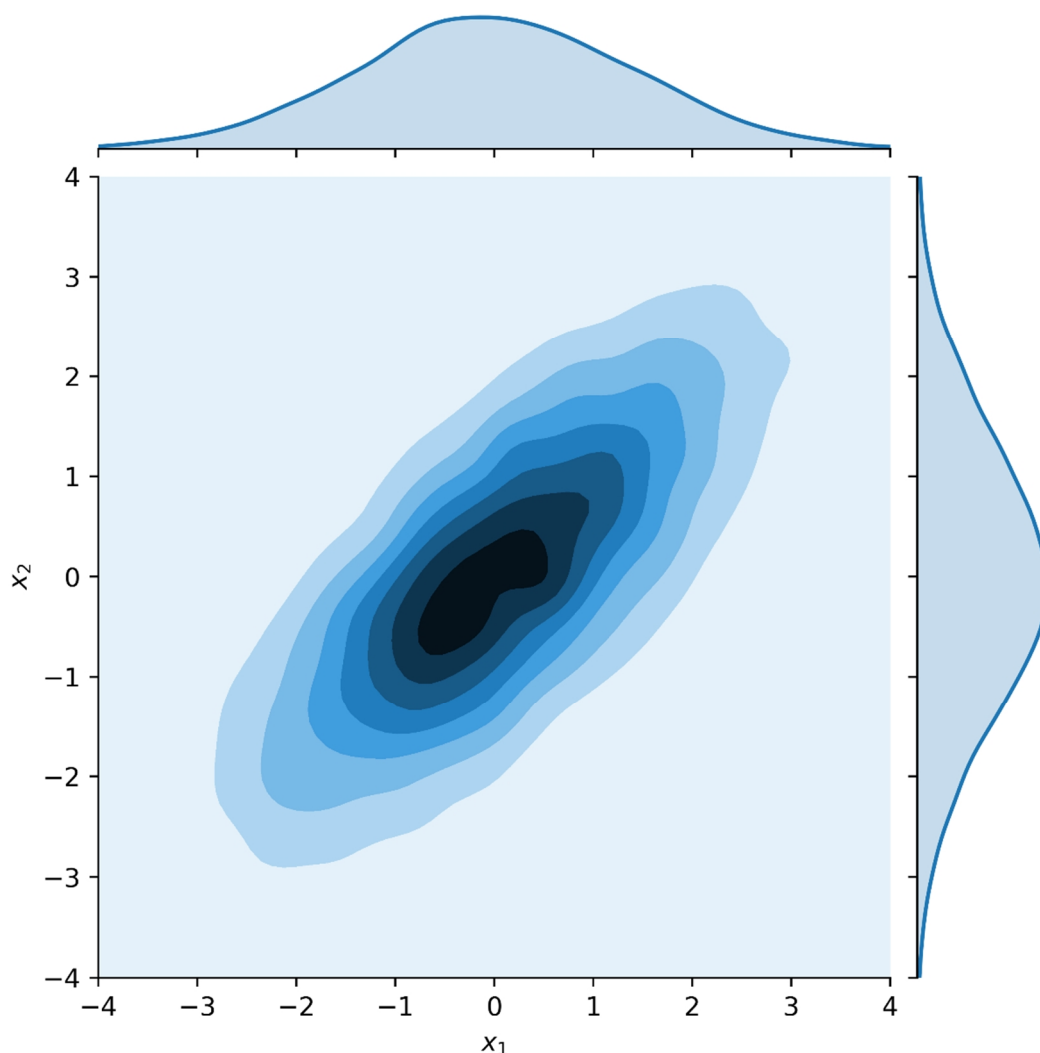
Esimerkkilaskelmia

Esimerkiksi kahden muuttujan tapaus, jossa on muuttujat ovat x_1 ja x_2 . Muuttujien keskiarvot olkoon $\mu = [0, 0]$, varianssit $\sigma^2 = [2, 2]$ ja kovarianssi 1,5. Tällöin kovarianssimatriisi on kaavan 20 mukainen, jonka Choleskyn hajotelma on esitetty kaavassa 21.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 2 & 1,5 \\ 1,5 & 2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

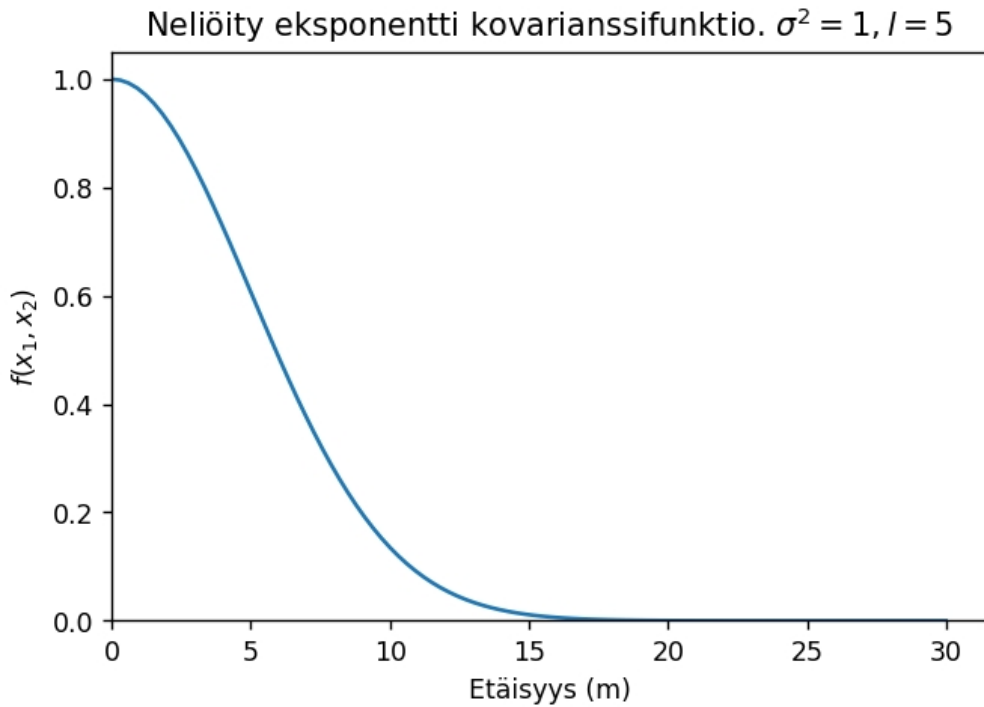
$$L = \begin{bmatrix} 1,414 & 0 \\ 1,061 & 0,935 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Tällöin satunnaislukumatriisin χ avulla saadaan kaavan 19 mukaan laskettua satunnainen piste S . Kuvassa 20 on esitetty tapauksesta 10 000 satunnaisotoksen kertymäfunktio, sekä yhdistetty kertymäfunktio.

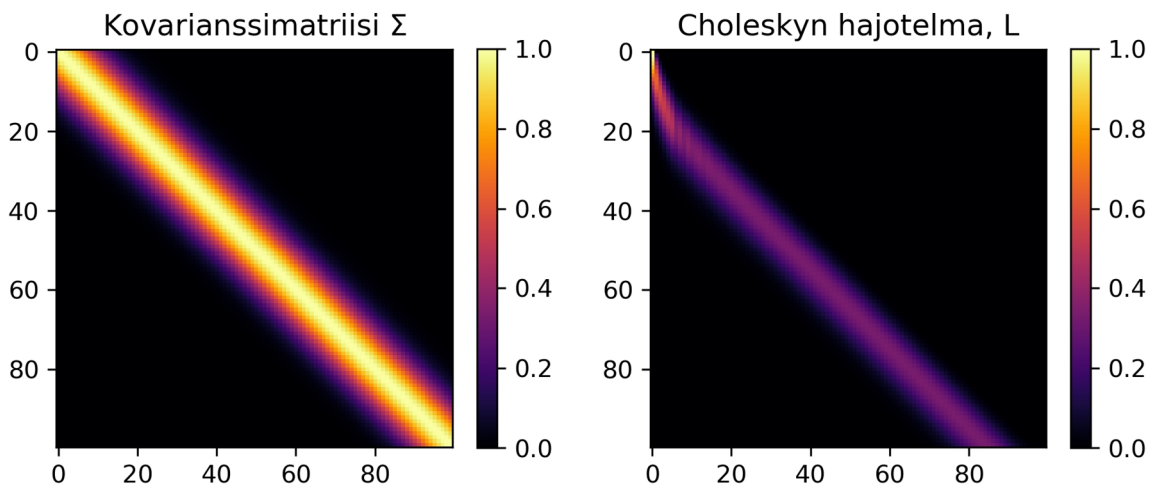


Kuva 20. Kahden toisistaan riippuvan muuttujan 10 000 otoksen yhdistetty kertymäkuvaaja. Kummatkin muuttujat ovat normaalijakautuneita.

Useamman muuttujan tapaus ei eroa kahden muuttujan tapauksesta kuin kovarianssin määrittämisessä. Jokaisen muuttujan välinen kovarianssi määritetään kovarianssifunktion avulla. Esimerkiksi tapauksessa, jossa on 100 muuttujaa linjassa yhden metrin välein toisistaan, määritetään kovarianssifunktio parametreilla varianssi 1 ja pituusskaala 5. Kovarianssifunktion kuvaaja esitetty kuvassa 21. Funktion avulla saadaan laskettua muuttujille kovarianssimatriisi, joka on esitetty kuvassa 22a. Kuvassa 22b on esitetty kovarianssimatriisin Choleskyn hajotelma. Matriisit on esitetty kuvamuodossa, jossa pysty- ja vaaka-akselit kuvaavat matriisin indeksien numeroa ja väri arvoa.



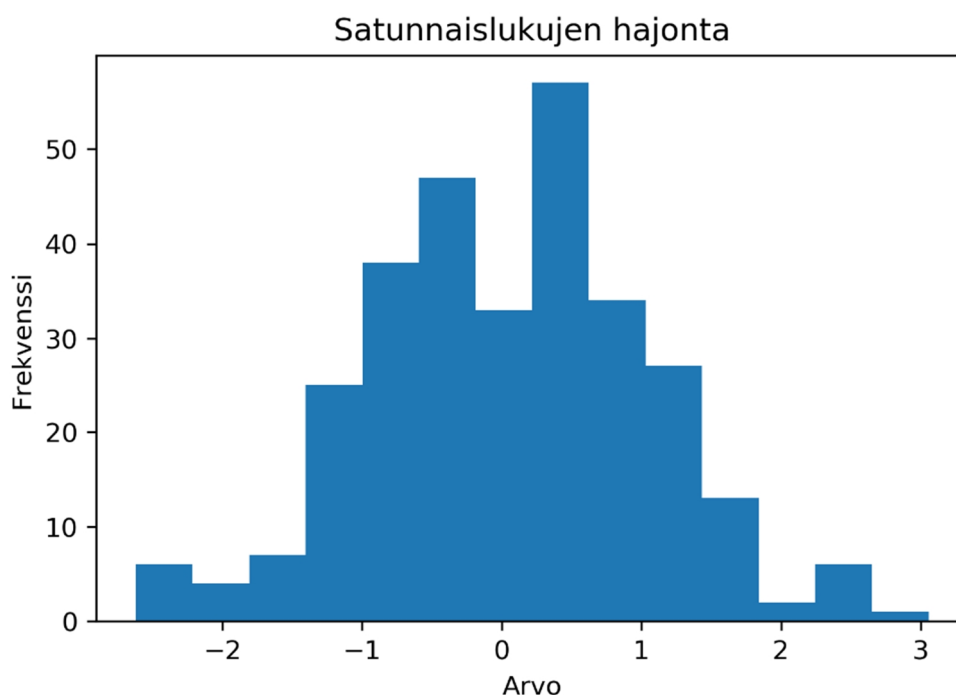
Kuva 21. Kovarianssin määrittämistä varten tarvitaan kovarianssifunktio. Kuvassa esitetty neliöity eksponentti kovarianssifunktio parametreillä $\sigma^2 = 1, l = 5$.



Kuva 22. Kovarianssifunktion avulla määritetty kovarianssimatriisi (a) ja kovarianssifunktion Choleskyn hajotelma (b). Matriisit esitetty kuvamuodossa, jossa pysty- ja vaaka-akselit kuvaavat matriisin luvun indeksia ja väri arvoa.

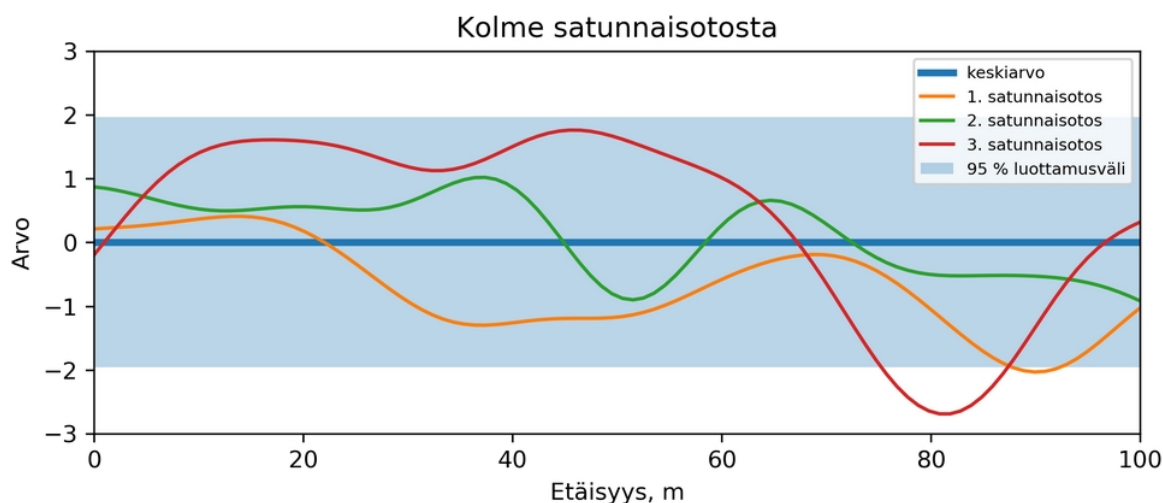
Ehdollista satunnaisotosta varten tarvitaan satunnaislukumatriisi χ . Määritetään matriisi koostumaan kolmesta sarakkeesta, jolloin matriisin avulla saadaan laskettua kolme ehdollista satunnaisotosta. Matriisi χ on esitetty kaavassa 22. Kuvassa 23 on esitetty matriisin numeroiden jakauma. Lukujen määrän kasvaessa jakauma lähestyy normaalijakaumaa.

$$\chi = \begin{bmatrix} 0,442 & 1,498 & 0,452 \\ 0,522 & 0,488 & 0,267 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -1,778 & -0,576 & -0,316 \\ -0,468 & 0,507 & -0,667 \end{bmatrix} \Bigg\} 100 \quad (22)$$



Kuva 23. Esimerkin satunnaislukumatriisin lukujen jakauma. Matriisin koon kasvaessa jakauma lähestyy standardinormaalijakaumaa.

Kaavan 19 avulla saadaan laskettua ehdolliset satunnaisotokset. Kuvassa 24 on esitetty tapauksen kolme laskettua satunnaisotosta. Kuvassa on esitetty myös 95 % luottamusväli, joka vastaa 1,96 keskihajontaa positiiviseen ja negatiiviseen suuntaan keskiarvosta.



Kuva 24. Kolme laskettua ehdollista satunnaisotosta. Kuvassa esitetty myös keskiarvo ja 95 % luottamusväli.

3.6 Ohjelmistot

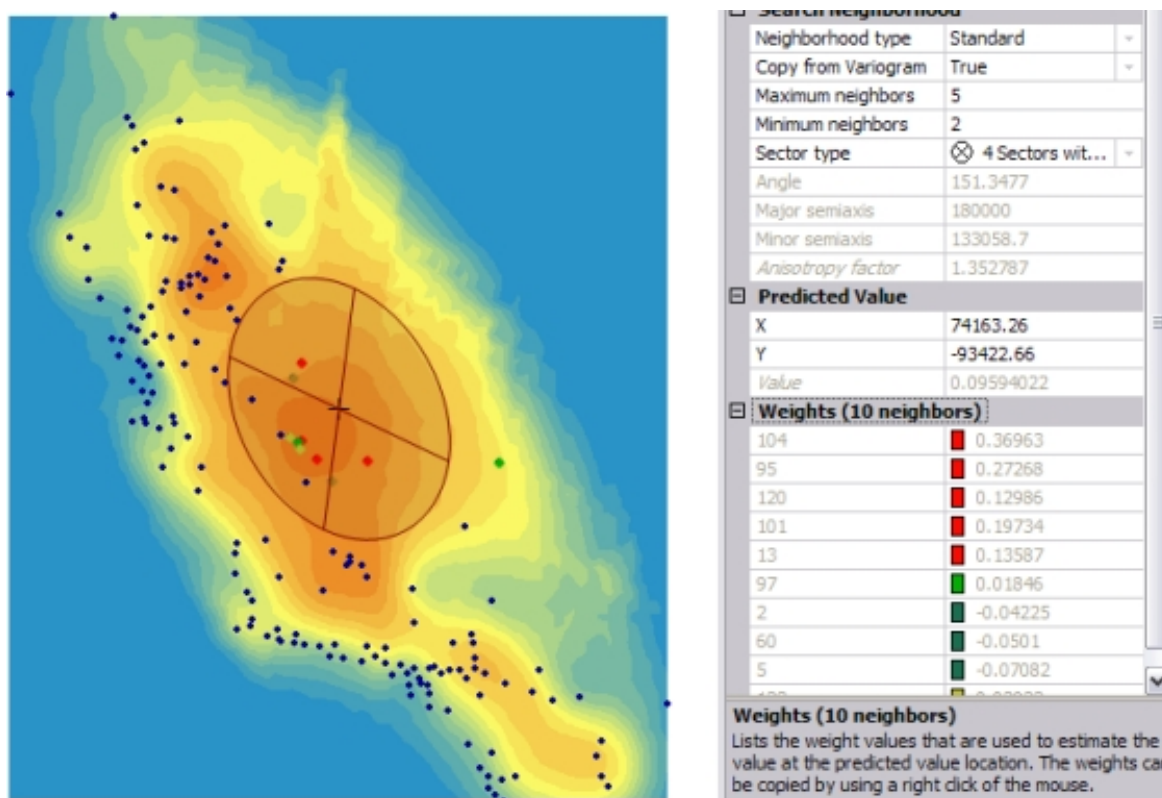
Tässä työssä laskentaan ja datan visualisointiin käytetään Python-ohjelmointikieltä ja sen moduuleja. Python on helposti opittava, korkean tason ohjelmointikieli (Python, 2018). Python on suosittu kieli erityisesti tieteelliseen laskentaan, sen laajojen avoimeen lähdekoodiin perustuvien moduulien ansiosta. Tutkimuksessa hyödynnettäviä moduuleja on muun muassa

Numpy, joka on tehokkaaseen matriisi- ja vektorilaskentaan erikoistunut moduuli (Numpy, 2018). Datan visualisointiin ja kuvaajien tekemiseen käytetään moduuleita Matplotlib (Matplotlib, 2018), sekä Seabornia (Seaborn, 2018). Moduulia SciPy käytetään funktioiden optimoimisessa, kolmioverkkojen muodostamisessa ja lineaarisessa interpoloinnissa (SciPy, 2018). DXF-tiedostojen käsittelemiseen käytetään ezdxf-moduulia, jolla voidaan luoda ja lukea tiedostoja Python-ympäristössä (ezdxf, 2018).

Kriging-mallinnukseen käytetään moduulia GPY, joka on Gaussisten prosessien mallintamiseen kehitetty kirjasto. Gaussinen prosessi -regressio (*gaussian process regression*) on Krigingistä monissa muissa tieteissä käytetty termi. GPY on Sheffieldin yliopiston koneoppimistutkimusryhmän ylläpitämä avoimen lähdekoodin moduuli (GPY, 2018).

Krigingiä voidaan tehdä myös useilla ohjelmilla, joilla on graafinen käyttöliittymä. Geoinformatiikassa Kriging-menetelmä on yleisesti hyödynnetty ja siksi se löytyykin monesta alan ohjelmasta. Myös monet mallinnukseen erikoistuneet ohjelmat tekevät interpolointeja Kriging-menetelmällä.

ArcMap on karttojen luomiseen, spatiaalisen tiedon hallintaan ja analyysiin tarkoitettu ohjelma (ArcMap, 2018). ArcMapilla on hyvät ominaisuudet Kriging-mallinnukseen. Ohjelmalla voidaan analysoida spatiaalista autokorrelaatiota, mallintaa Kriging-interpolatioita ja analysoida mallinnuksen epävarmuutta. Ohjelmalla on myös selkeät ohjeet ja esimerkkilaskelmat Kriging-mallinnuksen tekemiseen ohjelman verkkosivuilla. ArcMap on hyvä ohjelma erityisesti mallinnuksen visualisointiin. Kuvassa 25 on esitetty ohjelman esimerkkilaskelman painokertoimien visualisointi.



Kuva 25. ArcMapilla voidaan hyvin visualisoida Kriging mallinnuksen avulla saatuja tuloksia. Kuvassa on visualisoitu pisteen estimointiin käytettävien pisteiden painokertoimia. (ArcMap, 2018.)

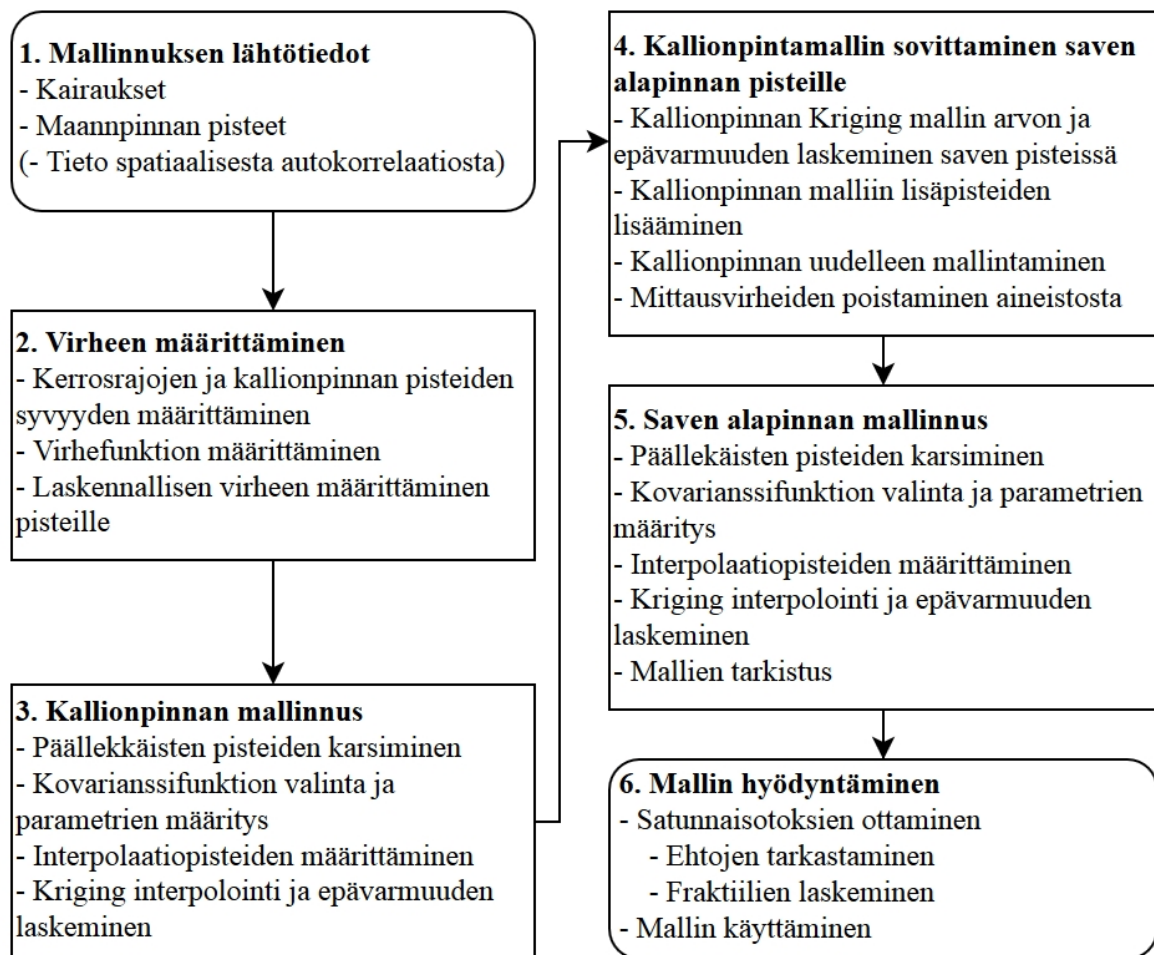
Autodesk Civil 3D -ohjelmalla voidaan tehdä yksinkertaisia Kriging-interpolaatioita. Ohjelmalla voidaan tihentää kolmioverkon pisteitä, niistä lasketun semivariogrammin perusteella. Käyttäjä voi valita useasta semivariogrammista käytettävän mallin ja tihentää kolmioverkon pisteitä tarvittavan määrän. Mallinnukseen on myös ohjelmiston verkkosivulla hyvät ohjeet. (Autodesk, 2018.)

4 Tutkimuksen suorittaminen

Tässä luvussa esitellään, kuinka työn case-tutkimuksessa mallinnetaan maaperää hyödyntämällä Kriging-menetelmää. Luvussa käydään läpi mallinnus vaiheittain. Kairausten virheen määräytyminen esitellään kappaleessa 4.2. Luvussa käydään myös yksinkertaistettu kaksikulotteinen laskelma Kriging-mallinnuksesta, sekä esitellään mallin hyödyntämistä stabiili-teettilaskelmassa.

4.1 Mallin muodostus

Kuvassa 26 on esitetty vuokaavio mallin muodostuksen vaiheista. Mallinnukseen tarvittavat lähtötiedot ovat kairauksista määritetyt saven alapinnan pisteet ja kallionpinnan pisteet sekä maanpinnan pisteet. Mikäli pisteitä on vähän, joudutaan tieto niiden spatiaalisesta autokorrelaatiosta oletamaan. Muussa tapauksessa se sovitettaisiin aineiston perusteella. Mallinnuksessa oletetaan, että kairausten virhe tunnetaan.



Kuva 26. Vuokaavio mallin muodostuksen vaiheista.

Kolmannessa vaiheessa aloitetaan kallionpinnan mallintaminen. Aluksi karsitaan mahdollisesti päällekkäiset pisteet. Seuraavaksi määritetään pisteille kovarianssifunktio, sekä sen parametrit. Tässä työssä käytetään neliöityä eksponenttifunktiota. Interpolointipisteiksi määritetään ruudukko pisteitä määritetylle suunnittelualueelle. Vaiheen lopuksi lasketaan alustava interpolaatio ja sille epävarmuus.

Neljännessä vaiheessa kallionpintamalli sovitetaan saven alapinnan pisteille. Saven alapinnan pisteille lasketaan kallionpinnan mallin interpolaatio sekä sen epävarmuus. Kallionpinnan

malliin lisätään lisäpisteitä, joissa kalliopinnan mallin interpolaatio on saven havainnon pisteiden yläpuolelle. Kalliopinta mallinnetaan uudestaan lisäpisteiden kanssa. Mikäli kalliopinta vielä nousee joissain pisteissä saven alapinnan yläpuolelle, oletetaan nämä saven pisteet mittausvirheiksi.

Tässä työssä kalliopinnan ja saven alapinnan välistä etäisyyttä kutsutaan moreenin paksuudeksi, vaikka kerros saattaa todellisuudessa koostua muusta tiivistä maasta. Saven alapinta mallinnetaan moreenin paksuutena. Viidenteen vaiheeseen eli saven alapinnan mallinnukseen kuuluu samat vaiheet kuin kalliopinnan mallinnukseen. Interpolointipisteinä käytetään samoja pisteitä kuin kalliopinnan mallinnuksessa. Lopuksi tarkistetaan mallit.

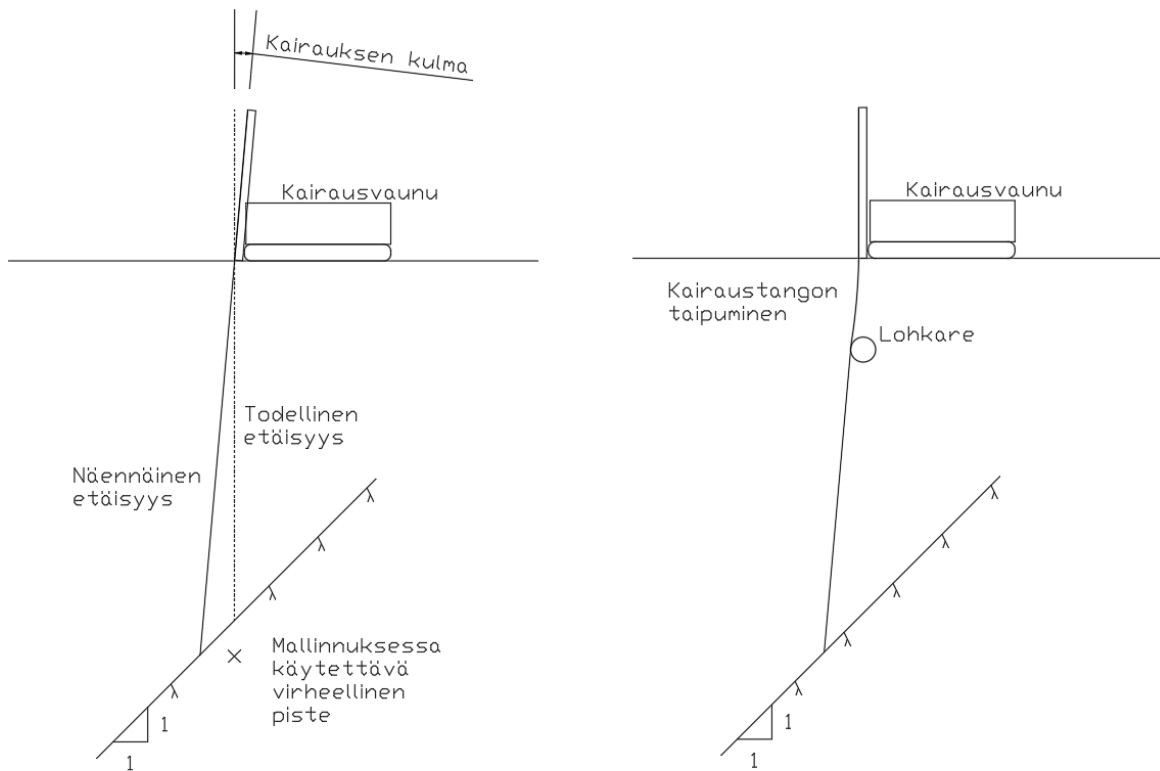
Mallista lasketaan tarvittaessa satunnaisotoksia. Satunnaisotoksista tarkistetaan niiden todennukaisuus. Mahdottomat pinnat ovat tapauksia, jossa pinnat leikkaavat toisiaan. Tällaisia ovat esimerkiksi kalliopinnan ja maanpinnan leikkaaminen tai saven alapinnan ja kalliopinnan leikkaaminen. Mahdottomat pinnat poistetaan aineistosta. Satunnaisotoksille lasketaan tarvittavat fraktiilit tai muut haluttavat arvot.

4.2 Kairausten virhefunktio

Tässä työssä oletetaan mallinnuksen helpottamiseksi, että kairauksen virhe tunnetaan. Kairauksista määritettyjen pintojen numeerisesta virheestä ei ole paljon tutkimusta, joten virhe joudutaan määrittämään puutteellisille lähtötiedoille. Keskeinen havainto kirjallisuusselvityksen perusteella on kairausten virheen riippuminen syvyydestä.

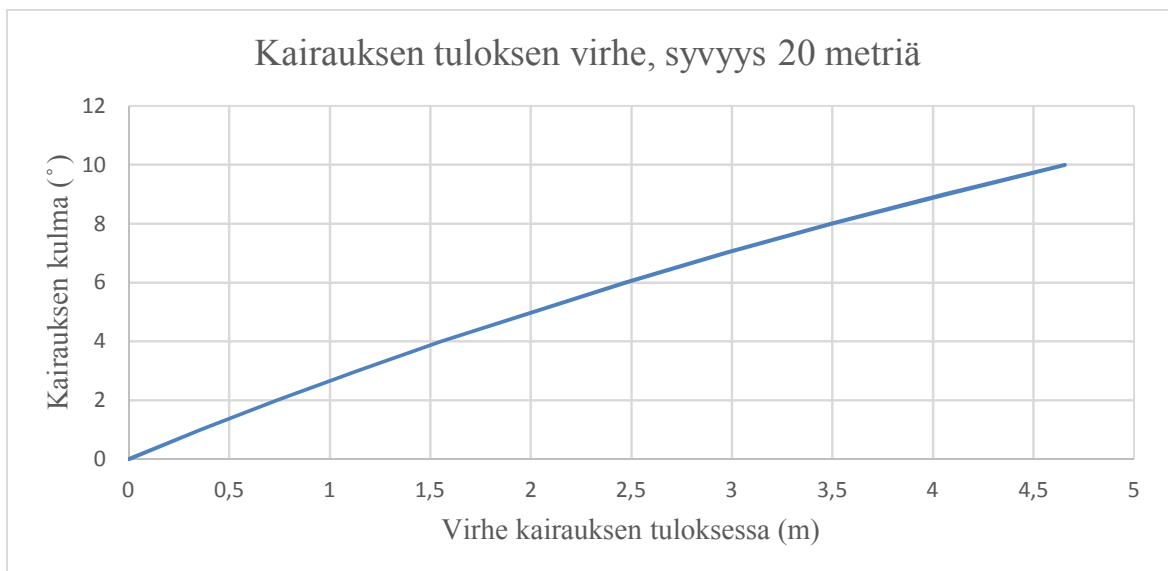
Kalliopinnan virheen riippuvuus pinnan syvyydestä voi mahdollisesti johtua mm. kairauksen vinoon lähtemisestä tai kairatangon taipumisesta. Jyrkästi vaihtelevan kallion lähellä syvälle ulottuva kairaus voi saada jo huomattavia virheitä pienestäkin kulmasta kairatangossa pystysuuntaan nähden. Kairaukset ovat lisäksi harvoin optimaalisissa olosuhteissa suoritettuja. Kairauskone on usein epätasaisella alustalla, joka saattaa olla merkittävästi kallistunut.

Kuvassa 27 on esitetty virhe, joka aiheutuu kairauksen vinoon lähtemisessä tai lohkkareen kohdalla taipumisesta. Vinoon lähtenyt kairaus aiheuttaa useimmiten kalliopinnan havainnon olevan todellisuutta syvemmällä. Tämä tukee Tantun (2015) aineiston perusteella tehtyjä havaintoja.



Kuva 27. Kairauksessa vinoon lähtemisestä ja kairatangon taipumisesta aiheutuva virhe.

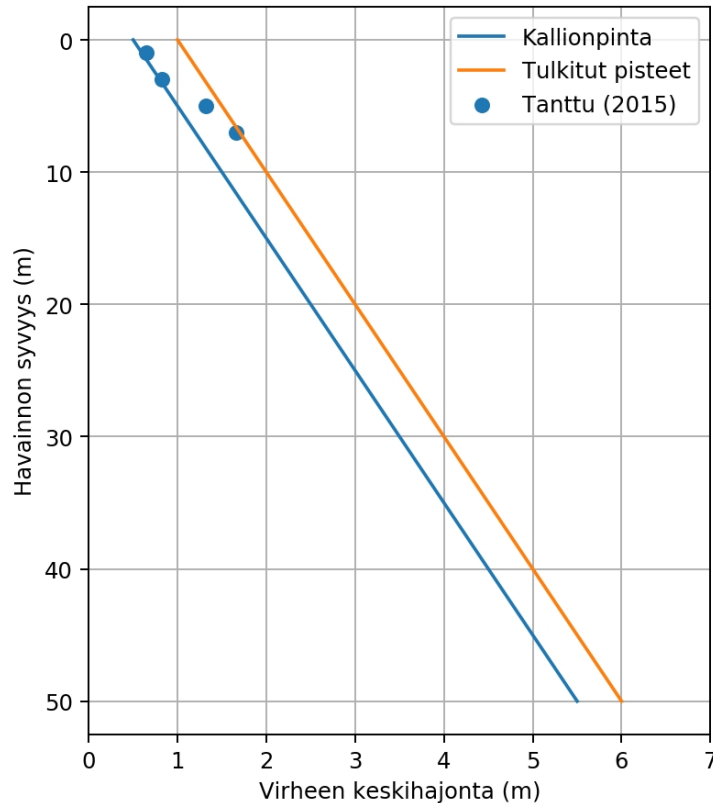
Kuvassa 28 on esitetty kairauksen kulman vaikutus virheeseen, kalliopinnan tason ollessa 20 metriä maanpinnan alapuolella kulmassa 1:1. Syvyyden kasvaessa myös kairauksen tuloksen virhe kasvaa. On myös syytä huomioida, että mitä syvemmälle kairaus ylettyy, sitä todennäköisemmin kairatanko taipuu. Kairauksissa myös tapahtuu sekä vinoon lähtemistä että kairatankojen matkalla taipumista.



Kuva 28. Kairauksen kulman vaikutus virheeseen, kun kallio on kulmassa 1:1 kahdenkymmenen metrin syvyydessä. Jo kahden asteen kulma johtaa noin 0,7 m poikkeamaan tuloksessa.

Tässä työssä virhe oletetaan normaalijakautuneeksi ja keskiarvo oletetaan nolllaksi. Suunnittelijan tekemien tulkintojen oletetaan lisäävän kairauksen virheen keskihajontaan 0,5 metriä.

Kairauksen virhe sovitetaan lineaarisella funktiolla taulukon 2 arvoja hyödyntämällä. Kuvassa 29 on esitetty työssä käytettävät kairausten virheet. Tulkitut pisteet tarkoittavat savi- ja täyttökerrosten havaintojen virhettä. Kaavassa 23 on esitetty määritettyjen kalliopinnan pisteiden virheen keskihajonta funktiona ja kaavassa 24 kairauksista tulkittujen pisteiden virheen keskihajonta funktiona.



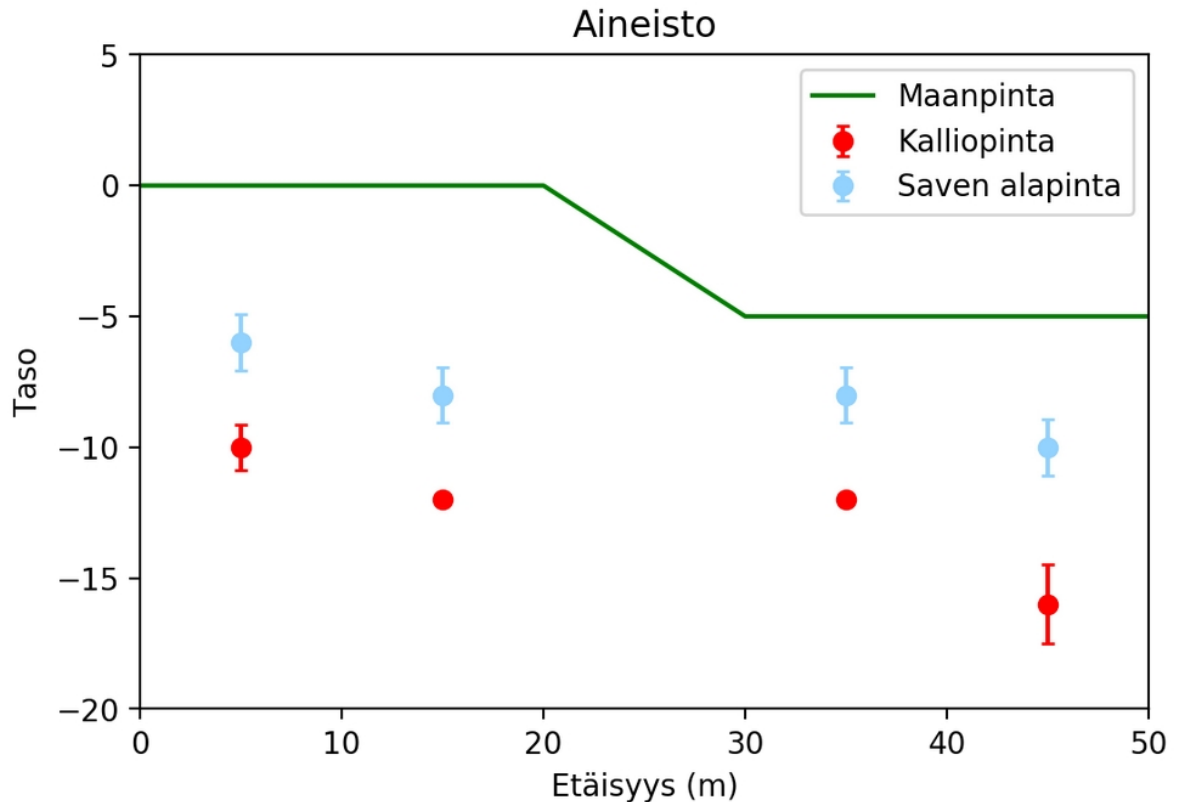
Kuva 29. Työssä käytettävien kairausten virhe. Kuvaajasta määritettävä virhe on normaali-jakauman keskihajonta.

$$virhe_{kallio}(syvyys) = 0.5 \text{ m} + 0.5 \cdot (syvyys/5) \quad (23)$$

$$virhe_{tulkittu}(syvyys) = 1 \text{ m} + 0.5 \cdot (syvyys/5) \quad (24)$$

4.3 Esimerkilaskelma kaksiulotteisesta Kriging-mallinnuksesta

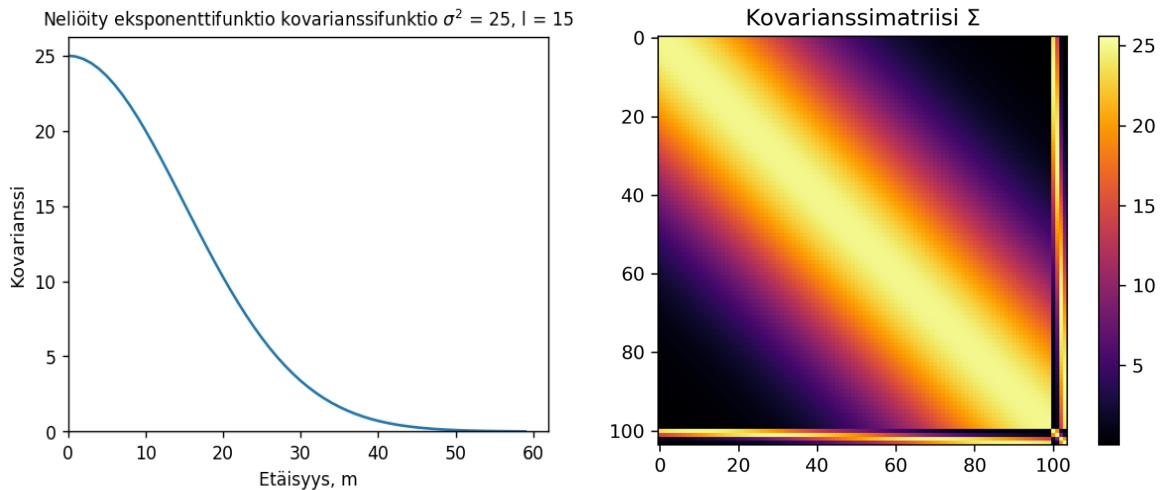
Tarkastellaan yksinkertaista kuviteltua esimerkitapausta, joka koostuu maanpinnan pisteaineistosta ja neljästä saven alapinnan ja kalliopinnan havaintopisteestä. Oletetaan että jokaisen pisteen epävarmuus tunnetaan. Kuvassa 30 on esitetty tapauksen aineisto. Kallion pinnan pisteet voidaan mieltää kalliovarmistuksiksi, joissa epävarmuus voisi olla määritetty esimerkiksi kairausten laadun perusteella. Saven alapinnan pisteiden havainnoissa on suurempi virhe, havaintojen tulkinnanvaraisuuden ja mittauksen suuremman epävarmuuden vuoksi.



Kuva 30. Käsiteltävän esimerkitapauksen aineisto. Kalliovarmistusten ja saven alapinnan havaintojen virheet on esitetty 95 % luottamusvälillä.

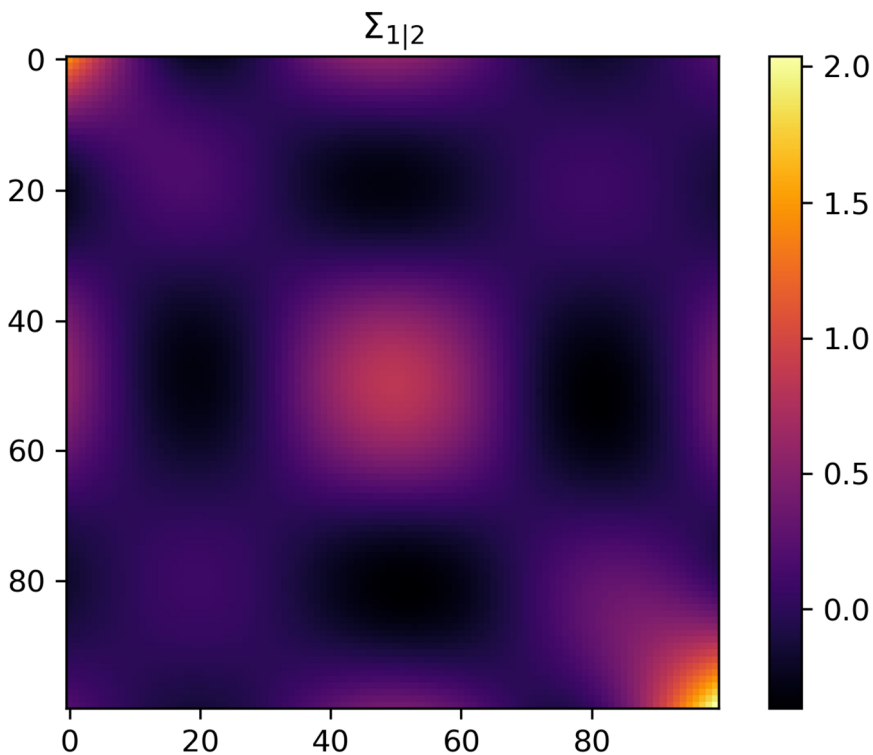
Kriging-mallin luomista varten tarvitaan tieto kalliopinnan ja saven alapinnan spatiaalisesta autokorrelaatiosta. Oletetaan, että tieto tiedetään etukäteen. Se on voitu määrittää esimerkiksi muiden alueen kalliopinnan ja saven alapinnan havaintojen avulla. Spatiaalista autokorrelaatiota mallinnetaan neliöidyllä eksponentti kovarianssifunktiolla, jonka parametrit ovat varianssi $\sigma^2 = 25$ ja pituusskaala $l = 15$. Saven alapinnan ja kalliopinnan spatiaalinen autokorrelaatio oletetaan yhtäläisiksi. Kuvassa 31a on esitetty kovarianssifunktio.

Määritetään interpoloitavat pisteet välille 0–50 m puolen metrin välein eli yhteensä 100 interpoloitavaa pistettä. Kuvassa 31b on kovarianssimatriisi, jossa interpoloitavien pisteiden kovarianssi on indekseillä 0–100 ja indeksit 100–104 on havaintojen. Saven ja kalliopinnan kovarianssimatriisit ovat lähes samanlaiset, sillä havainnot on samoissa pisteissä otettu. Havaintojen virheet eroavat kuitenkin hieman, joten kovarianssimatriisin indeksien 100–104 keskinäisten kovarianssien eli diagonaalien arvot eroavat hieman.



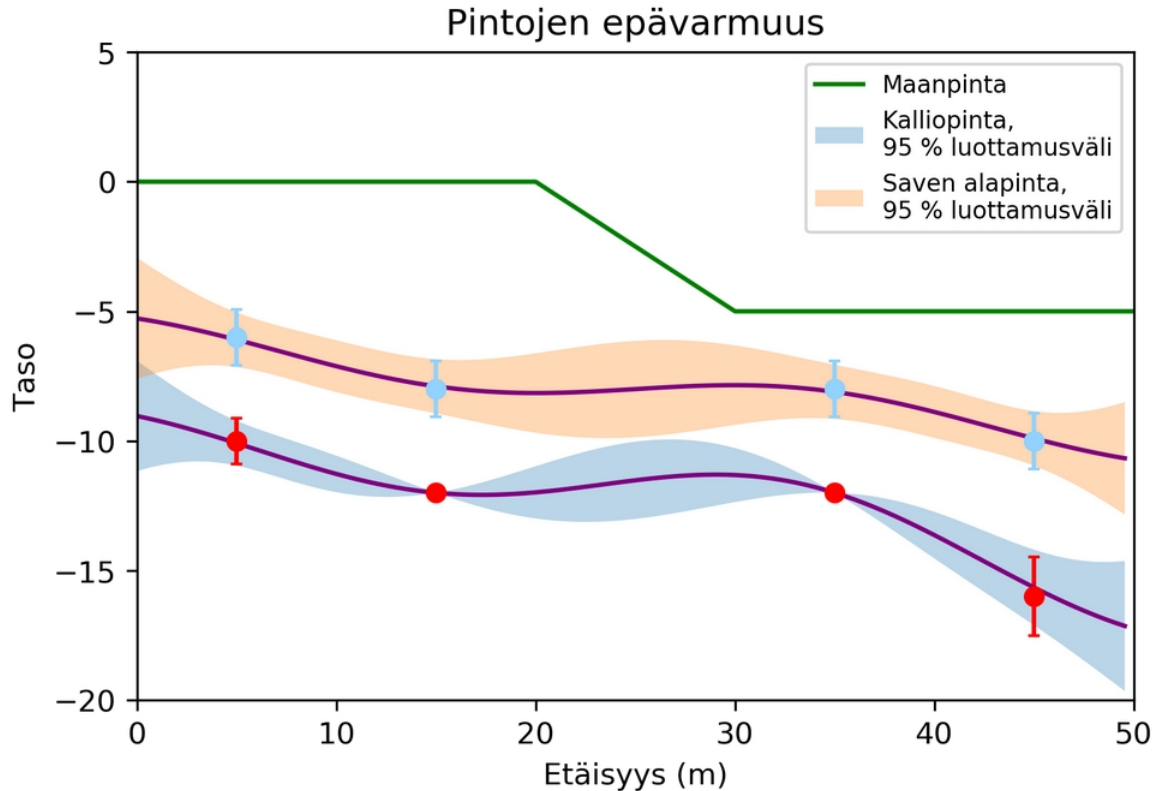
Kuva 31. Vasemmassa kuvassa laskelman kovarianssifunktio (a) ja oikeassa kuvassa kalliopinnan kovarianssimatriisi (b). Kovarianssimatriisi on kaavan 5 mukainen. Kovarianssimatriisin indeksit 0-100 on interpolointipisteiden ja indeksit 100-104 havaintopisteiden. Saven alapinnan kovarianssi eroaa ainoastaan indeksien 100-104 keskinäisten kovarianssin eli diagonaalien osalta, johtuen näytteiden erilaisesta virheestä.

Kaavojen 16 ja 17 avulla saadaan laskettua aineistolle keskiarvot ja kovarianssimatriisi. Keskiarvona käytetään havaintojen keskiarvoa. Interpolointipisteiden keskiarvo on 0. Kuvassa 32 on esitetty interpolointipisteiden laskettu ehdollinen kovarianssimatriisi $\Sigma_{1|2}$. Kuvasta voidaan tulkita diagonaalilla olevien interpolointipisteiden varianssin olevan lähellä nollaa näytteiden lähettyvillä, joiden virhe on nolla, eli indeksien 30 ja 70 kohdalla. Mustilla alueilla kovarianssi on alle 0, joka tarkoittaa pisteiden negatiivista riippuvuutta.



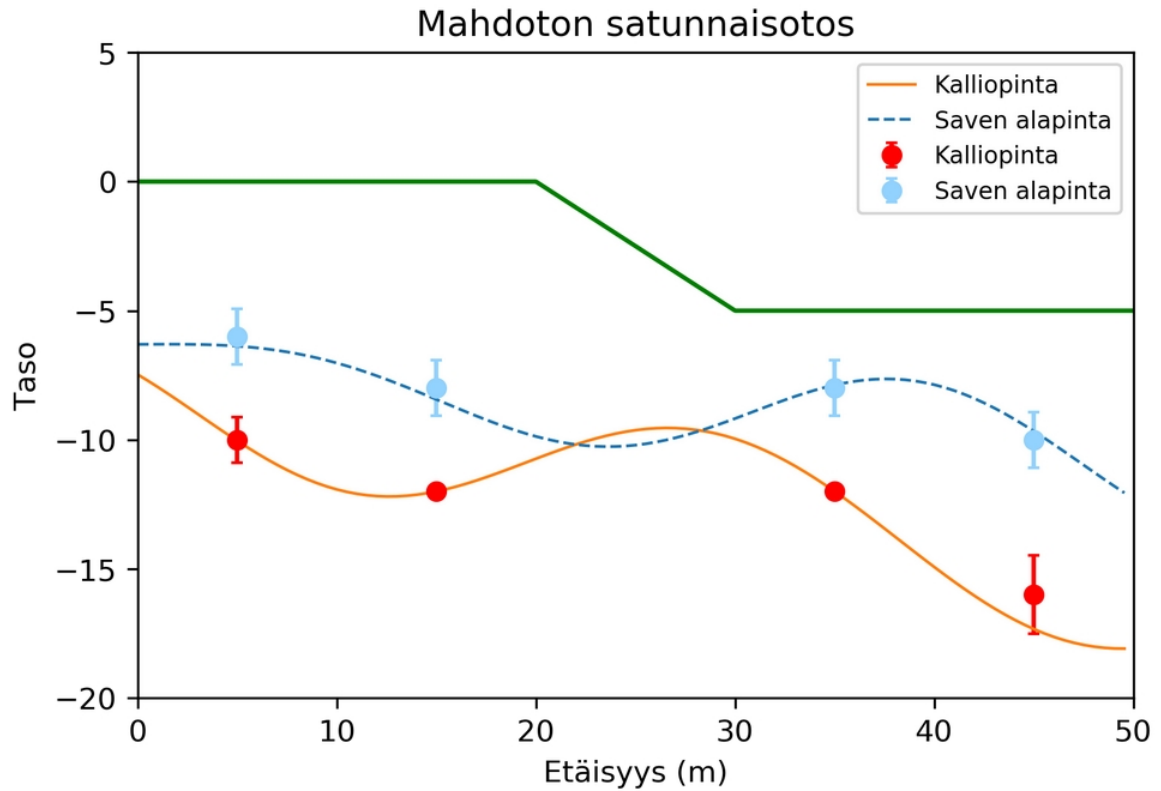
Kuva 32. Laskettu ehdollinen kovarianssimatriisi. Diagonaalilla on interpolointipisteiden varianssi.

Kuvassa 33 on esitetty laskelman laskettu keskiarvo sekä 95 % luottamusväli. Kuvassa nähdään interpoloinnin olevan varmintä lähellä havaintopisteitä ja epävarmintä havaintojoukon ulkopuolella. Havaintojen virhe vaikuttaa tässä tapauksessa merkittävästi interpoloinnin tarkkuuteen. Kalliopintaa ei tässä laskelmassa tarvitse sovittaa saven alapinnan pisteille, sillä sen todennäköisin pinta kulkee saven pisteiden alapuolella.



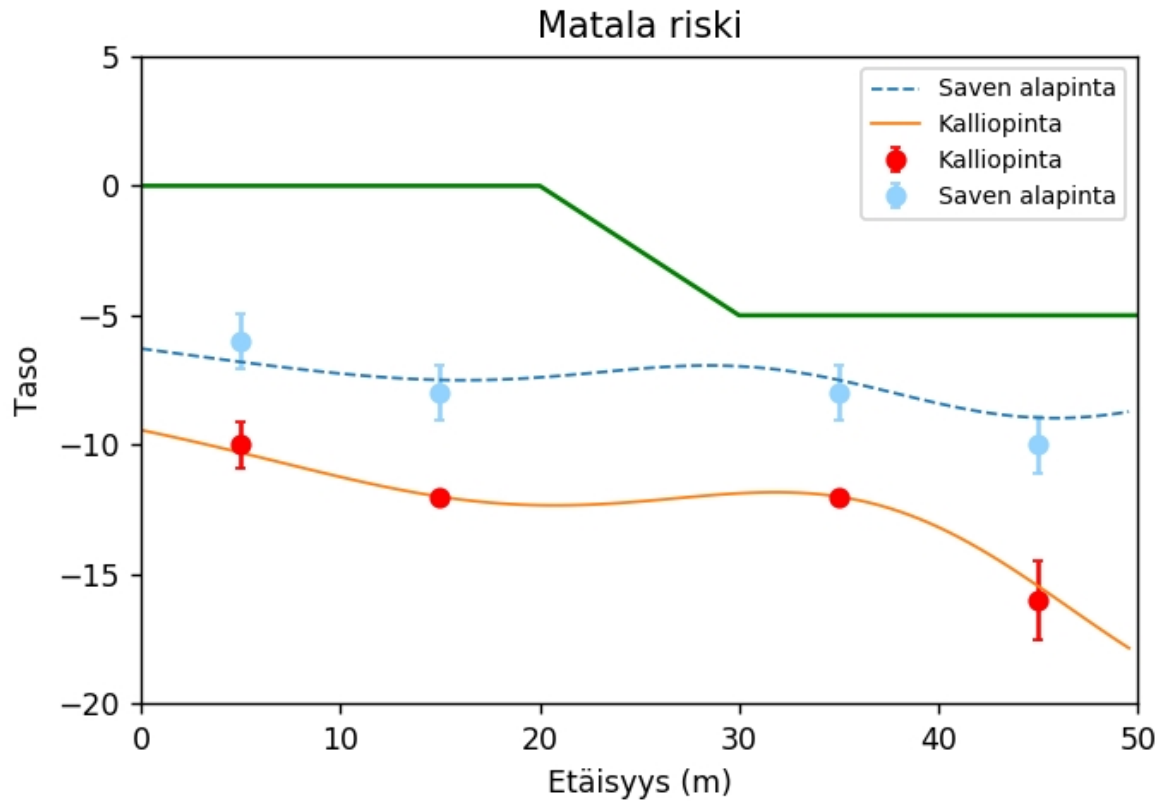
Kuva 33. Kriging-mallinnuksella laskettu keskiarvo ja 95 % luottamusväli.

Kuvan 32 kovarianssimatriisin Cholesky-hajotelman avulla saadaan laskettua kaavalla 19 laskelmalle satunnaisotoksia. Lasketaan tapaukselle 1000 satunnaisotosta. Toistetaan Kriging-mallinnus myös kallionpinnalle ja yhdistetään otokset. Satunnaisotoksista tarkistetaan niiden todenmukaisuus. Satunnaisotoksissa mallinnetut pinnat eivät saa leikata toisiaan tai maanpintaa. Kuvassa 34 on esitetty satunnaisotos, jossa mallinnetut pinnat leikkaavat. Mahdolliset satunnaisotokset poistetaan aineistosta.

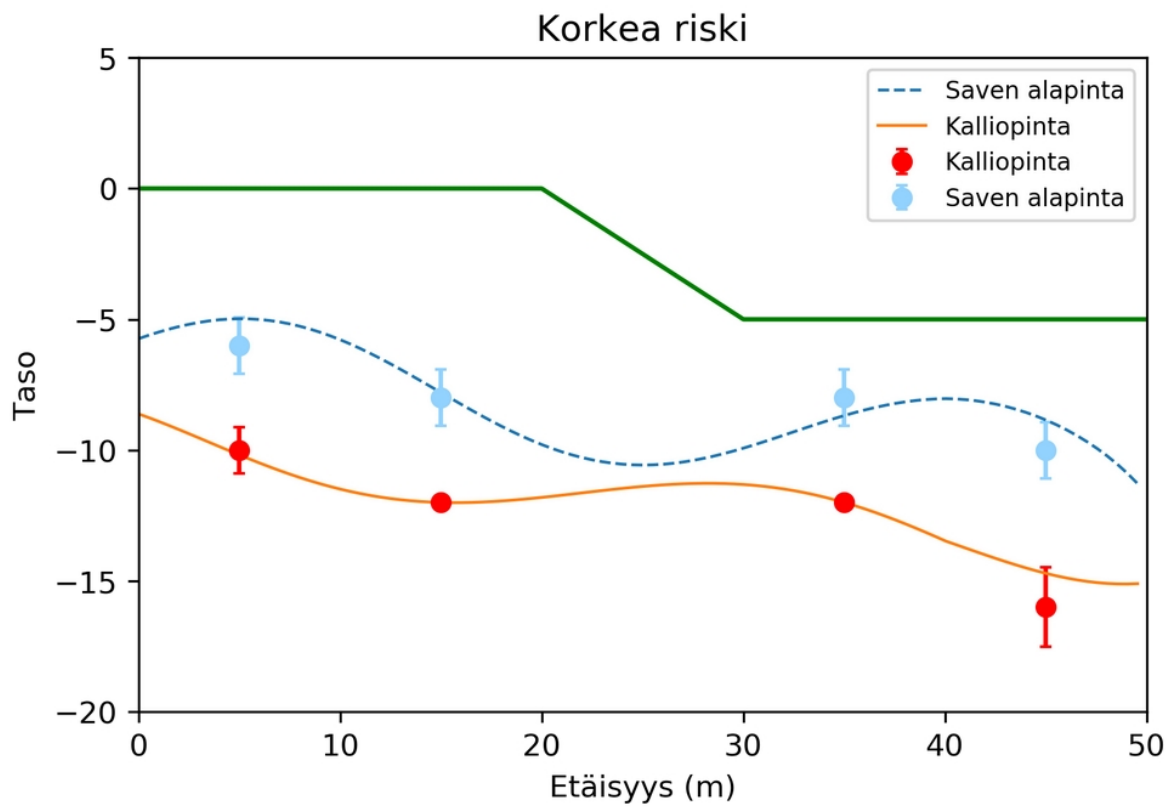


Kuva 34. Kuvassa on esitetty mahdoton satunnaisotos. Satunnaisotoksissa pinnat eivät saa leikata toisiaan tai maanpintaa. Mahdottomat tapaukset poistetaan aineistosta.

Tarkastellaan lasketuista satunnaisotoksista maanpinnan luiskan stabiliteetin kannalta huonointa tapausta. Arvioidaan riskin olevan suurin, kun saven alapinta on leikkauksen kohdalla 25 metriä alimmillaan. Lasketaan satunnaisotoksista arvo, jonka yläpuolella on 5 % aineistosta. Vastaavasti lasketaan luiskan stabiliteetin kannalta suotuisa tapaus eli arvo, jonka alapuolella on 5 % aineistosta. Kuvissa 35 ja 36 esitetty kyseiset satunnaisotokset.



Kuva 35. Satunnaisotoksista laskettu maanpinnan luiskin stabiliteetin kannalta hyvä tapaus.

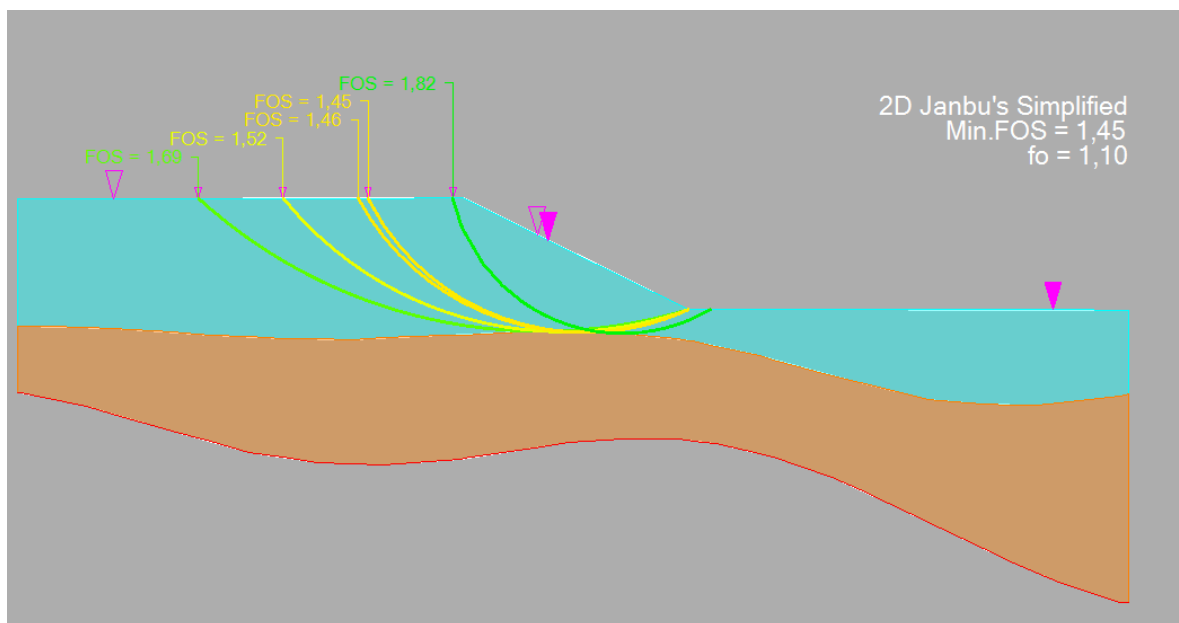


Kuva 36. Satunnaisotoksista laskettu maanpinnan luiskin stabiliteetin kannalta huono tapaus.

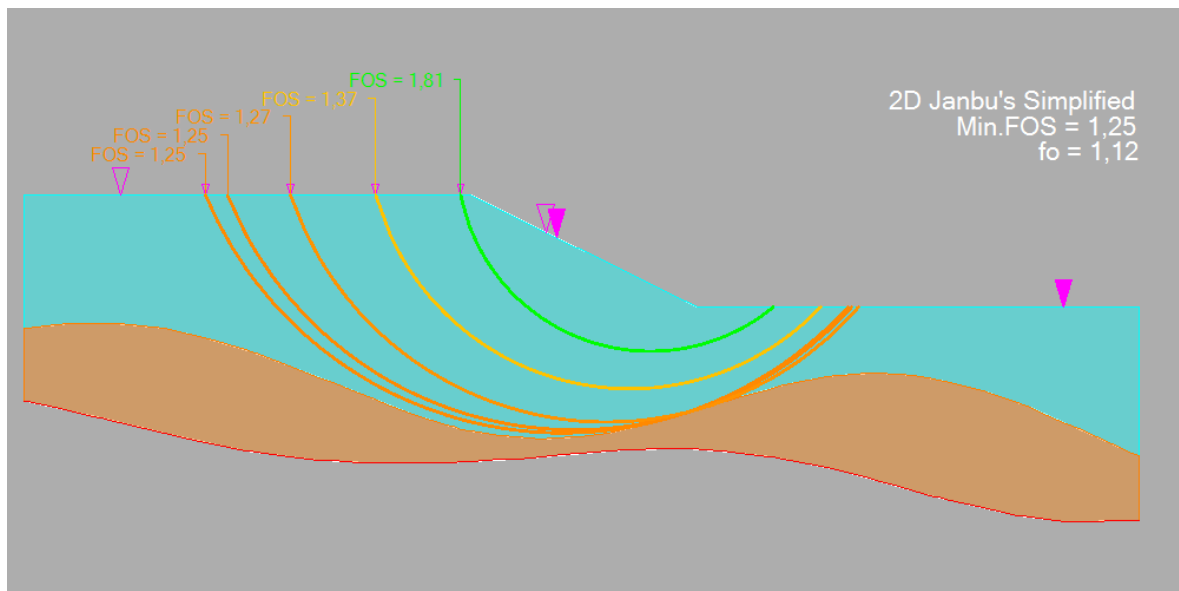
Kuvista 35 ja 36 voidaan havaita mallinnuksen epävarmuuden vaikuttavan merkittävästi pintojen kulkuun. Lasketaan yksinkertainen stabiliteettilaskelma taulukon 3 mukaisilla maaperän parametreilla. Stabiilitetti lasketaan korkean riskin ja matalan riskin pinnoille. Stabiilitettiin laskentaan käytetään Janbusin yksinkertaista lamellimenetelmää ympyrän muotoisilla liukupinnoilla GeoCalc 3 -ohjelmalla. Kuvissa 37 ja 38 on esitetty stabiliteettilaskelmien tulokset. Korkean riskin tapauksessa kokonaisvarmuus on 1,25, kun matalan riskin tapauksessa 1,45. Liukupinta hakeutuu tapauksessa myös huomattavasti syvemmältä aiheuttaen suuremman massan liikkumisen sortuman tapahtuessa.

Taulukko 3. Esimerkkilaskelmassa stabiilitetin laskentaan käytettävät maaperän ominaisuudet.

	Tilavuuspaino γ , kN/m ³	Koheesio c , kN/m ²	Kitkakulma ϕ , °
Savi	15	15	0
Moreeni	20	0	35



Kuva 37. Stabiilitettilaskelman tulokset matalan riskin tapauksessa, jossa $F_{min} = 1,45$.



Kuva 38. Stabiilitettilaskelman tulokset korkean riskin tapauksessa, jossa $F_{min} = 1,25$.

Laskelman epävarmuutta pystyttäisiin parantamaan, mikäli saven alapinnan tai kalliopinnan havaintojen tarkkuus olisi parempi. Laskelman tarkkuuteen vaikuttaa myös merkittävästi määritetyn kovarianssifunktion parametrit. Esimerkin tapauksessa tai muuten vähäistä aineistoa käsiteltäessä kovarianssifunktion parametrit joudutaan arvioimaan aiempaan tietoon perustuen.

Maaperän pintojen epävarmuuden mallintaminen ei sovellu suoraan käytettäväksi yhdessä kokonaisvarmuusmenetelmän kanssa. Kokonaisvarmuusmenetelmällä otetaan huomioon kaikki riskit ja menetelmää käytettäessä pintoja yleisesti mallinnetaan lineaarisella interpoloinnilla. Epävarmuutta mallintamalla saadaan siis epärealistisia tuloksia käytettäessä kokonaisvarmuusmenetelmää. Epävarmuudet huomioitaessa saman laskennallisen riskin saavuttamiseksi varmuus voi olla matalampi verrattuna lineaarisiin pintoihin.

5 Case-tutkimus

Tässä luvussa käsitellään työn Case-tutkimusta. Tutkimuskohde esitellään yleisesti ja esitellään työssä käytettävät mallintamisen lähtötiedot. Mallin muodostus käydään vaiheittain läpi kalliopinnalle ja saven alapinnalle. Mallinnuksen tuloksia vertaillaan kolmioverkkoon ja hyödynnetään kuvitteellisen kadun taloudellisen riskin arvioinnissa ja lisäpohjatutkimusten suunnittelemisessa. Kappaleessa 5.4 myös analysoidaan tulosten todenmukaisuutta.

5.1 Yleistä

Työssä käsiteltävä tutkimusaineisto on Hermanninrannan ja Kyläsaaren alueelta Helsingin kaupungista. Tutkimusaineisto on rajattu lännessä Hermannin rantatiehen ja idässä se muokaa rantaviivaa ja sen lähialuetta. Kuvassa 39 on esitetty case tutkimuksen sijainti ja tarkastelualueen rajaus. Tarkastelualue on tätä työtä varten mielivaltaisesti rajattu.



Kuva 39. Työn case-tutkimuksen aineiston sijainti ja rajattu tarkastelualue Kyläsaarella ja Hermanninrannassa (Helsinki, 2018).

Hermannin rantapuiston ja Kyläsaaren alue on pääosin savikkoa, jossa savikerroksen paksuus on suurelta osin suuri. Alueella kova pohja on yleisesti 20–40 metrin syvyydessä. Kyläsaaren entisen saaren kohdalla pintamaa koostuu moreenialueista ja kallioiden alueista. Maanpinta on alueella melko tasaista ja sen taso on yleisesti noin +1...+4. (Ramboll, 2014.)

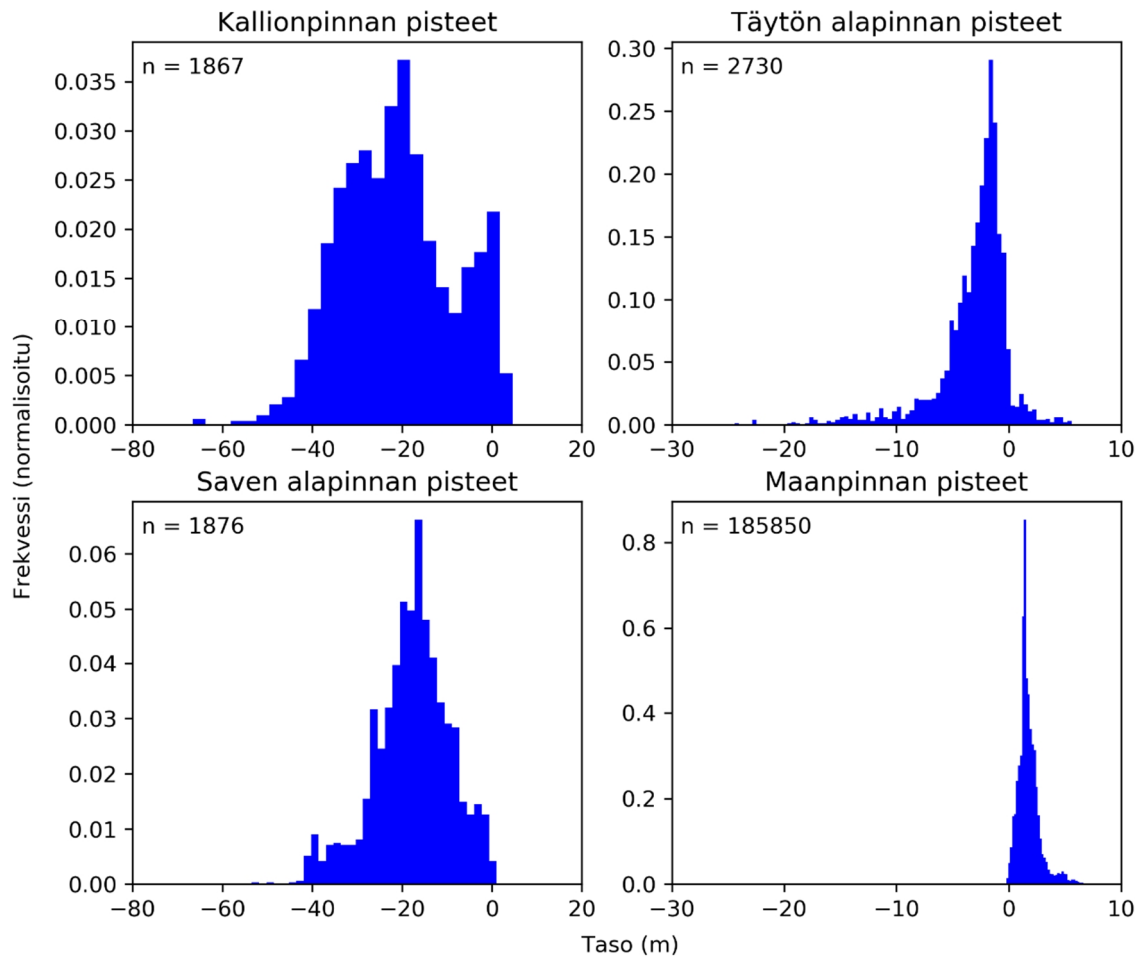
Alue on suurimmalta osaltaan entistä merenpohjaa, joka on täytetty sekalaisella täyttömateriaalilla viimeisen 170 vuoden aikana. Alueen vaihteittain toteutetut täytöt on aloitettu 1840-luvulla. Suurin osa täytöistä on tehty 1920-luvulta alkaen. Leveimmillään täyttö ulottuu yli 500 metrin päähän alkuperäisestä rantaviivasta. Suuri osa täytöistä on tehty suunnittelemattomasti. Täyttö on pääosin sekalaista kitkamaata, sisältäen hiekkaa, soraa, kiviä, lohkareita, rakennusjätettä, tuhkaa ja polttolaitoskuonaa. Kuvassa 40 on esitetty alueelta otettuja ilmakuvia, joista hahmottaa alueen täytön etenemisen 1930-luvulta lähtien. Kuvassa punaiset rajaukset kuvaavat eri vuosikymmenillä tehtyjä tuhka- ja kuonatäyttöjä (1940, -50, 60, 70 ja 80-luvuilla tehtyt täytöt). Siniset rajaukset ovat rakennettavuustarkastelua (Ramboll, 2014) varten tehdyt aluerajaukset. (Ramboll, 2014.)



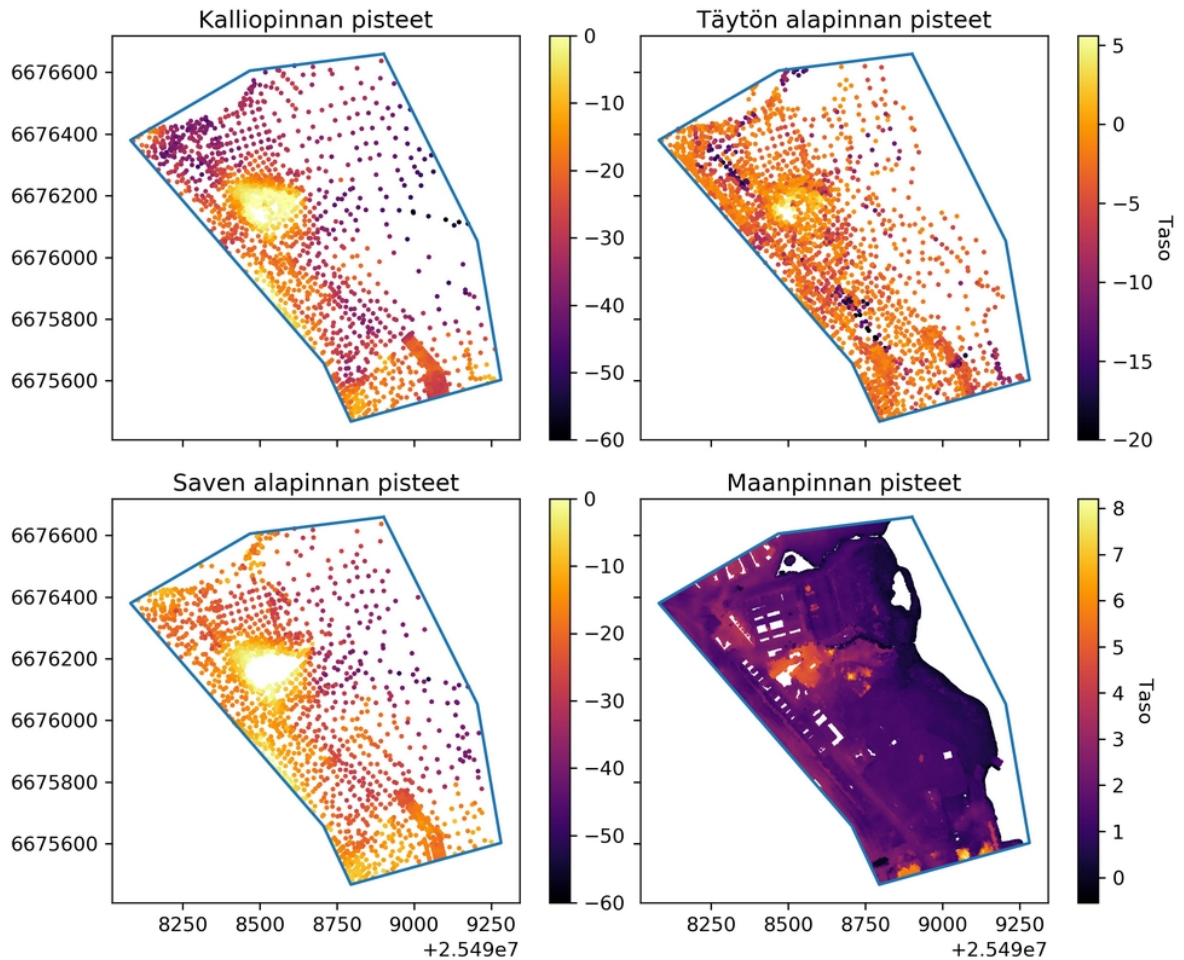
Kuva 40. Neljä eri ajankohtina otettua ilmakuvaa tutkimusalueesta. Tutkimusalue koostuu sekalaisista maa-, purkujäte- sekä tuhka- ja kuonatäytöistä täytöistä, joista suurin osa on tehty 20-luvulta lähtien. (Ramboll, 2014.)

5.2 Lähtötiedot

Kohteen aineisto koostuu DXF-tiedostoista, jotka sisältävät työssä tarvittavat pisteet. Tutkimuspisteiden kairausdiagrammeja ei tässä työssä tarkastella vaan lähtökohtana työssä ovat valmiiksi kairauksista tulkitut ja analysoidut kerrosrajat. DXF-tiedostot sisältävät kairauspisteiden diagrammeista tulkitut kallion yläpinnan tasot, täytön alapinnan tasot, saven alapinnan tasot ja laserkeilausaineiston maanpintapisteet. Kuvassa 41 on esitetty pisteiden tasojen jakaumat. Aineistosta on rajattu kuvan 39 tarkastelualueen ulkopuoliset pisteet pois. Kuvassa 42 on visualisoitu kalliopinnan, täytön alapinnan, saven alapinnan ja maanpinnan pisteiden taso.



Kuva 41. Kyläsaaren ja Hermanninrannan tarkastelualueen aineiston havaintopisteiden lukumäärät ja jakaumat. Vasemmalta ylhäältä on esitetty; kalliopinnan taso (a), täyttökerroksen alapinnan taso (b), savikerroksen alapinnan taso (c) ja maanpinnan taso (d).

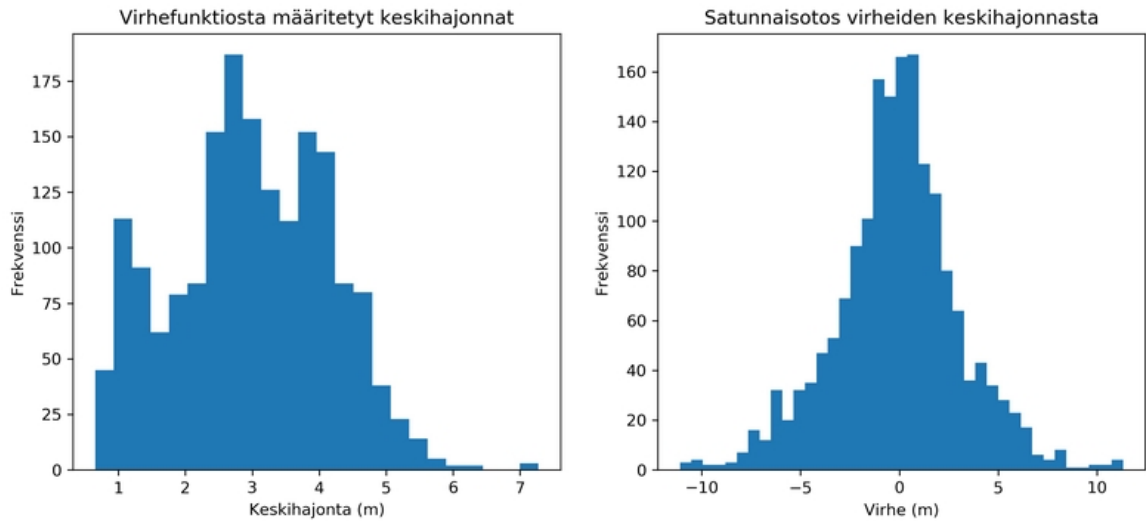


Kuva 42. Kyläsaaren ja Hermanninrannan havaintopisteet ja niiden taso visualisoituna. Vasemmalta ylhäältä on esitetty; kallionpinnan pisteiden taso (a), täytön alapinnan pisteiden taso (b), saven alapinnan pisteiden taso (c) ja maanpinnan pisteiden taso (d).

5.3 Mallintaminen

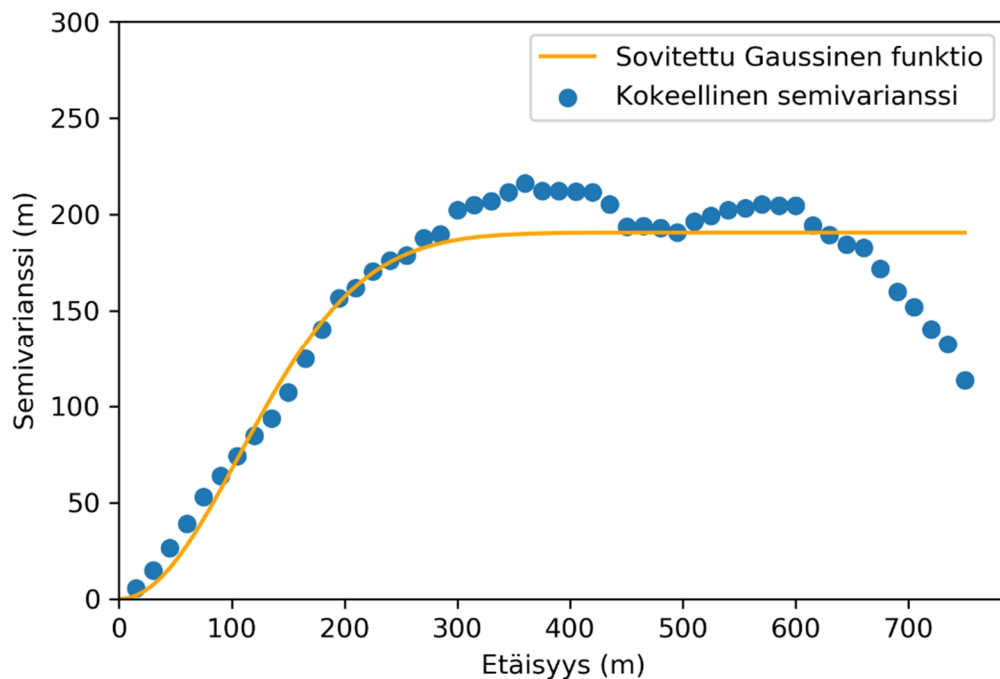
5.3.1 Kalliopinnan mallintaminen

Mallinnus aloitetaan mallintamalla kalliopinta. Ensin kalliopinnan pisteille määritetään syvyys eli erotus maanpinnan tasosta. Kalliopintahavainnon kohdalle interpoloidaan maanpinnan taso lähimpien maanpinnan havaintopisteiden perusteella. Kalliopinnan havaintopisteen kohdalla määritetään kallionpinnan ja maanpinnan välinen syvyysero. Erotuksesta määritetään kaavan 23 mukaiset virheet kalliopisteille. Kuvassa 43a on esitetty tarkastelualueen kallionpinnan pisteiden virheiden keskihajontojen jakaumat ja kuvassa 43b keskihajontojen normaalijakaumasta otettu satunnaisotos.



Kuva 43. Kyläsaari ja Hermanninranta. Vasemmassa kuvassa on esitetty kalliopintahavaintojen virhefunktioilla määritettyjen virheiden keskihajonnat (a) ja oikeassa niistä otettu satunnaisotos (b).

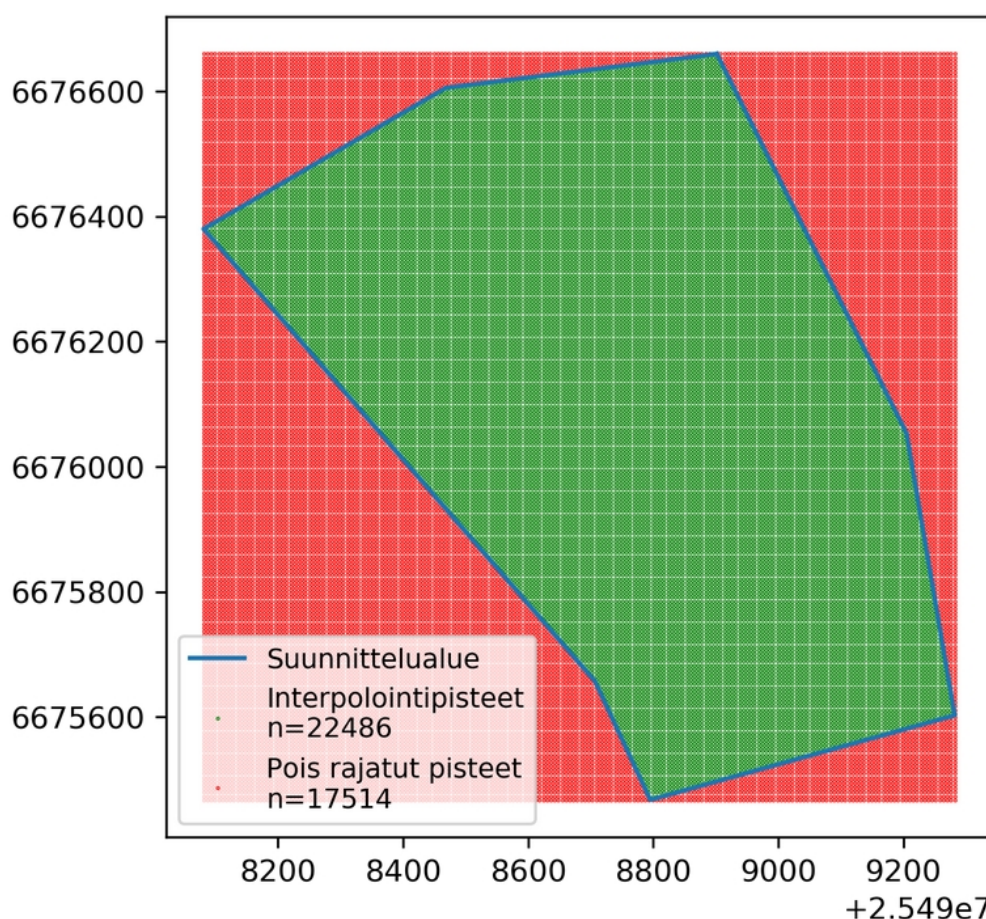
Kalliopinnan pisteillä mallinnetaan kokeellinen semivarianssi ja siihen sovitettu Gaussinen variogrammfunktio. Sovitettu funktio vastaa neliöityä eksponenttifunktiota parametreilla $\sigma^2 = 191$ ja $l = 107$. Pituusskaala uudelleen sovitetaan aineistoon moduulin GPy sovitushjelmalla. Lopullinen käytettävä funktio on neliöity eksponenttifunktio parametreilla $\sigma^2 = 191$ ja $l = 52$. Ohjelman määrittämä pienempi pituusskaala on mallinnuksen kannalta varovaisempi arvio ja lisää mallin epävarmuutta.



Kuva 44. Kyläsaari ja Hermanninranta. Kalliopinnan pisteiden kokeellinen semivarianssi ja siihen sovitettu alustava funktio.

Tarkastelualueelle määritetään 40 000 interpolointipisteen ruudukko alueen minimi ja maksimi koordinaateilla, josta poistetaan alueen ulkopuoliset pisteet. Interpolointipisteitä mää-

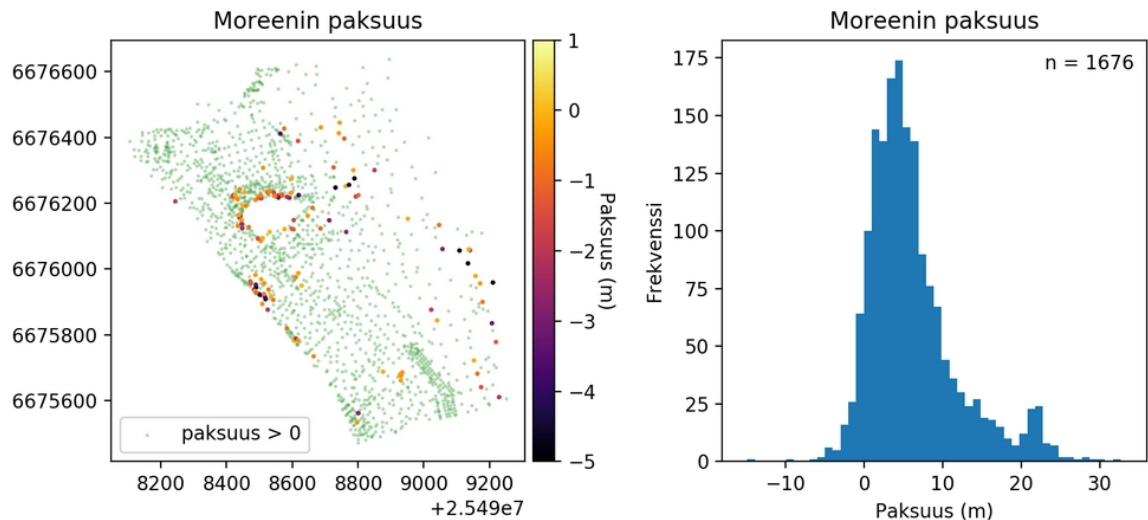
ritetään tarkastelualueelle yhteensä 22486. Kuvassa 45 on esitetty interpolointipisteet. Interpolointipisteille lasketaan GPy-moduulilla Kriging-interpoloinnin keskiarvo ja sille keskihajonta.



Kuva 45. Kyläsaari ja Hermanninranta. Alueelle määritetyt interpolointipisteet. Tarkastelualueen sijainti on esitetty kuvassa 39.

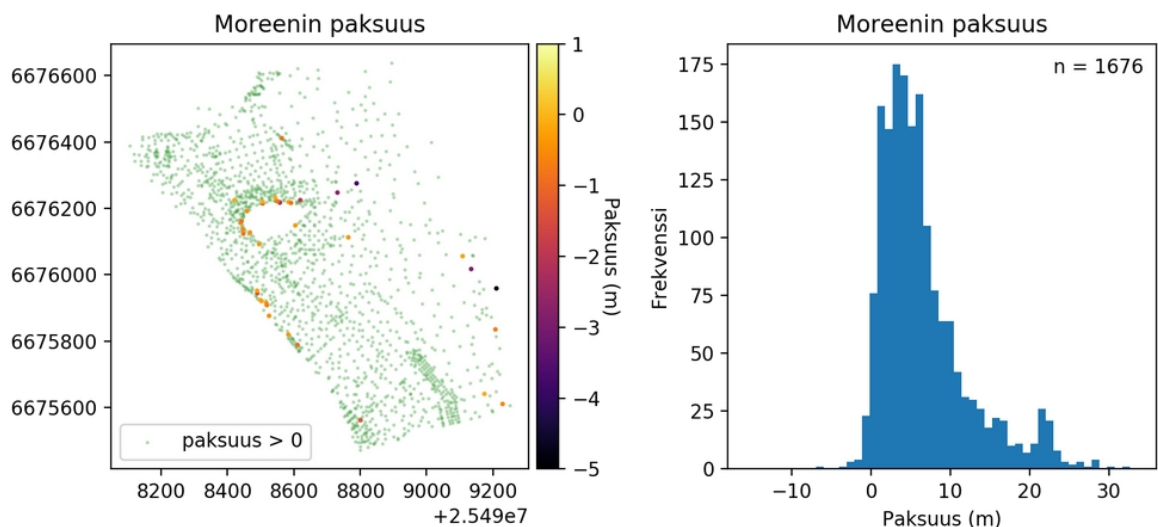
Saven alapinnan taso mallinnetaan etäisyytenä kalliopinnan Kriging-interpolointiin. Mitä suurempi virhe ja eri kerrosten pisteiden eriävät koordinaattitiedot vaikeuttavat interpolointia, eikä näin voida suoraan käyttää kairauksesta määritettyä etäisyyttä saven ja kalliopinnan välillä.

Moreenin paksuus lasketaan kalliopinnan ja saven alapinnan pisteiden erotuksena. Määritetään interpolointipisteiksi saven pisteiden koordinaatit ja interpoloidaan kalliopinta näille pisteille. Moreenin paksuus voi olla tässä mallinnuksen vaiheessa negatiivinen. Kuvassa 46a on esitetty moreenin paksuus pisteinä, rajattuna ylhäältä nolnaan metriin. Kuvassa 46b on esitetty moreenin paksuuden jakauma.



Kuva 46. Kyläsaari ja Hermanninranta. Vasemmassa kuvassa on esitetty alustava moreenin paksuus rajattuna maksimissaan nollaan (a). Oikeassa kuvassa on esitetty alustava moreenin paksuuden jakauma havaintopisteissä (b). Kalliopinta sovitetaan uudestaan pisteille, joissa moreenin paksuus on negatiivinen.

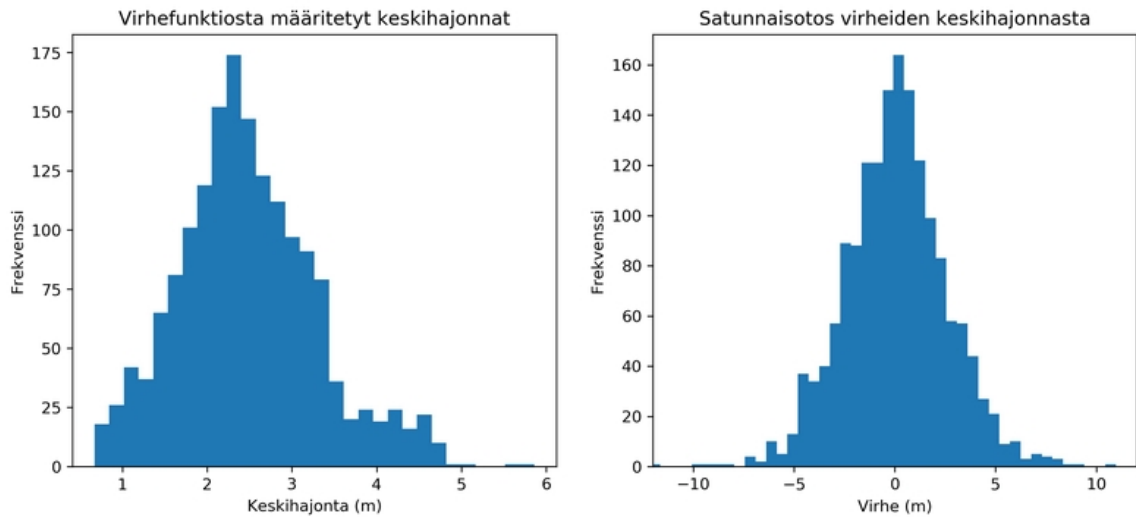
Kalliopinnan mallin sovitus tehdään uudestaan 122 pisteelle, joissa moreenin paksuus on negatiivinen. Pisteiksi lisätään moreenin negatiivisen paksuuden pisteet saven alapinnan tasolla vähennettynä kaksi metriä. Kahden metrin vakioarvoa käyttämällä saadaan kalliopinta kulkemaan suurimman osan saven alapinnan havaintopisteiden alapuolelta. Suuremman arvon käyttäminen ei merkittävästi muuta tilannetta. Vakioarvon käyttämisellä on vähäinen merkitys, sillä pisteiden epävarmuus on suuri. Epävarmuutena käytetään Kriging-mallinnuksella saatua epävarmuutta. Kuvassa 47a on esitetty uuden kalliopinnan Kriging-mallinnuksella saatu moreenin paksuus havaintopisteissä, sekä kuvassa 47b paksuuksien jakauma. Moreenin paksuus on vieläkin muutamissa havaintopisteissä negatiivinen. Nämä pisteet oletetaan mittausvirheiksi tai muuten merkityksettömiksi ja poistetaan aineistosta.



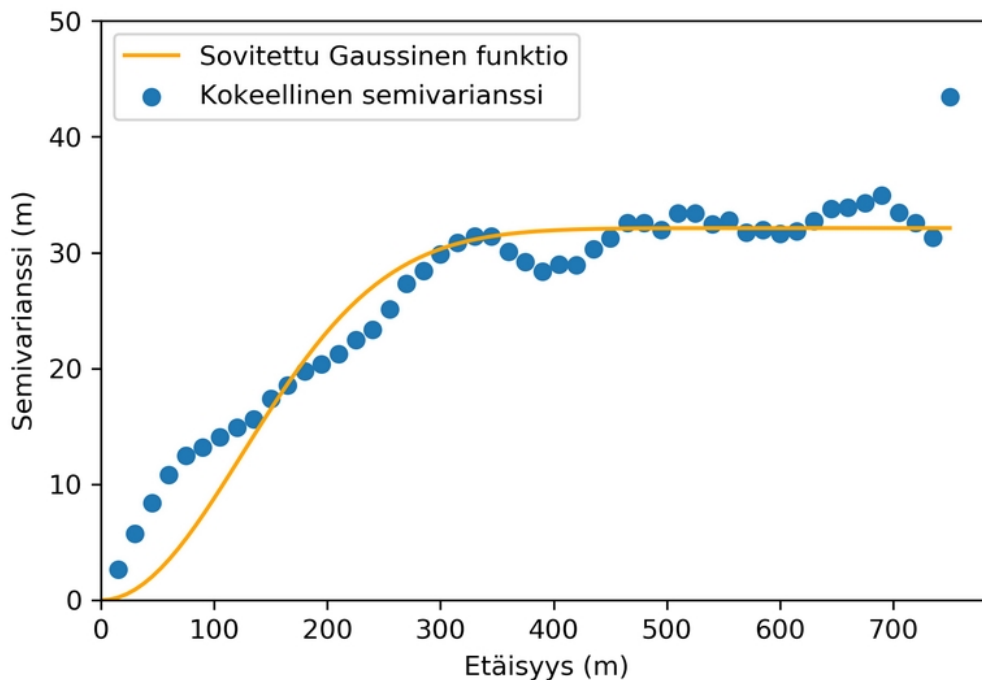
Kuva 47. Kyläsaari ja Hermanninranta. Vasemmassa kuvassa on esitetty iteroitu moreenin paksuus rajattuna maksimissaan nollaan (a). Oikeassa kuvassa on esitetty iteroitu moreenin paksuuden jakauma havaintopisteissä (b). Negatiiviset arvot poistetaan aineistosta.

5.3.2 Saven alapinnan mallintaminen

Saven alapinnan pisteille mallinnusprosessi toistetaan samalla tavalla kuin kalliopinnan pisteille. Kuvassa 48a on esitetty saven alapinnan havainnoille määritetty virhe ja kuvassa 48b niistä otettu satunnaisotos. Kuvassa 49 on esitetty moreenin paksuudelle kokeellinen semivarianssi ja siihen sovitettu alustava Gaussinen funktio. Lopullinen sovitus GPy -moduulin avulla on neliöity eksponenttifunktio parametreilla $\sigma^2 = 32$ ja $l = 47$.



Kuva 48. Kyläsaari ja Hermanninranta. Vasemmassa kuvassa on esitetty saven alapinnan virhefunktioilla määritettyjen virheiden keskihajonnat (a) ja oikeassa niistä otettu satunnaisotos (b).



Kuva 49. Kyläsaari ja Hermanninranta. Moreenin paksuuden pisteiden kokeellinen semivarianssi ja siihen sovitettu alustava funktio.

5.3.3 Täytön alapinta

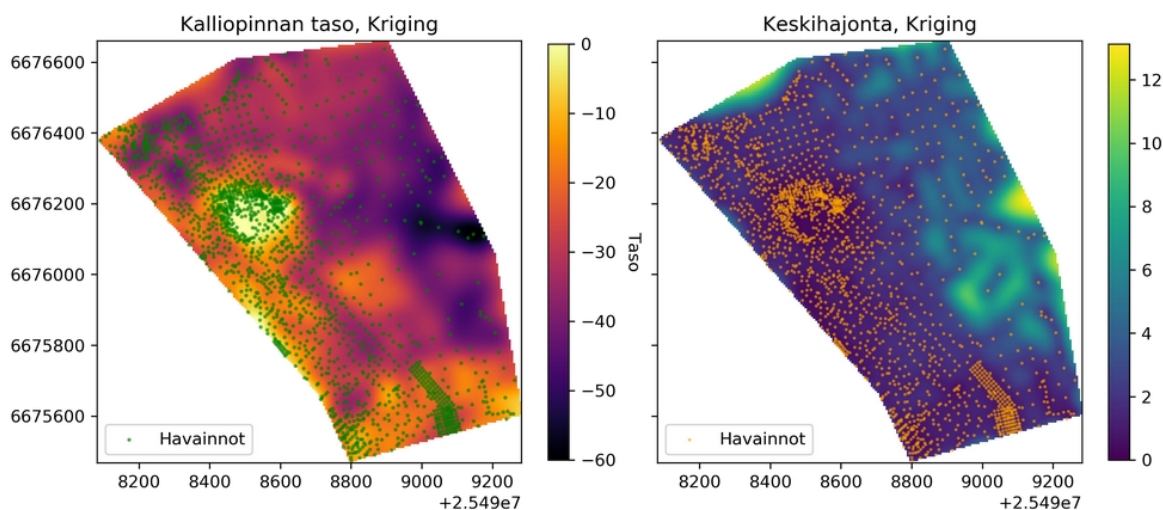
Sekalaisen täytön alapinnan tasoa tai sen suhdetta maanpintaan eli täytön paksuutta on hankala mallintaa tällä menettelyllä. Kuvassa 42b nähdään täytön alapinnan jyrkkä vaihtelu, sekä sen spatiaalisen autokorrelaation muuttuminen alueellisesti. Joissain kohdissa täyttö on pyritty tekemään syvälle (pohjaantäyttö) ja sen rajat ovat jyrkkiä, kun taas yleisemmin alueella täyttö on tehty suoraan olevan maanpinnan päälle tasaisesti. Täytön alapinnan taso tai sen paksuus ei siis yleisesti täytä yksinkertaisen Krigingin olettamuksia.

Alueen täyttö on ihmisten tekemää, eikä näin noudata geologisia prosesseja. Täytön alapinnan taso on myös ajallisesti riippuvainen. Alueen kairaukset on tehty eri ajankohtina pitkän ajan kuluessa, jolloin useat tutkimuspisteet eivät enää kuvaa nykytilannetta täytön paksuuden tai alapuolisen savikerroksen painuman vaikutuksen osalta. Osa kairauksista on tehty ennen täyttöjen tekemistä ja osassa tutkimuspisteissä täyttöä on lisätty tai poistettu tutkimusten tekemisen jälkeen. Täytön alapinnan pisteisiin liittyy lisäksi suuri epävarmuus, sillä täyttö ei ole homogeenista vaan sisällöltään vaihtelee merkittävästi. Tällöin kairauksista yksiselitteisen tulkin tekeminen on erityisen haastavaa.

5.4 Tulokset ja analysointi

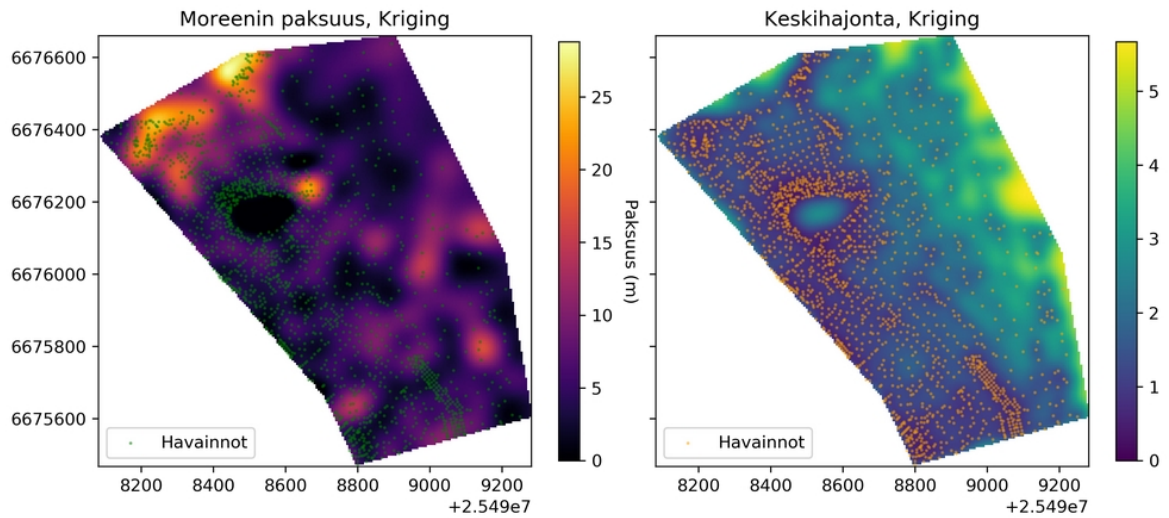
5.4.1 Laskennan tulokset

Kuvassa 50 on esitetty Krigingillä määritetty kalliopinnan taso ja sen hajonta. Visualisoinnista huomataan, että kalliopinnan interpoloinnin varmuus on suurinta siellä, missä on paljon havaintoja ja havainnot ovat lähellä maanpintaa. Alueen kalliopinnan taso kuitenkin tunnetaan suhteellisen hyvin interpoloinnin perusteella.



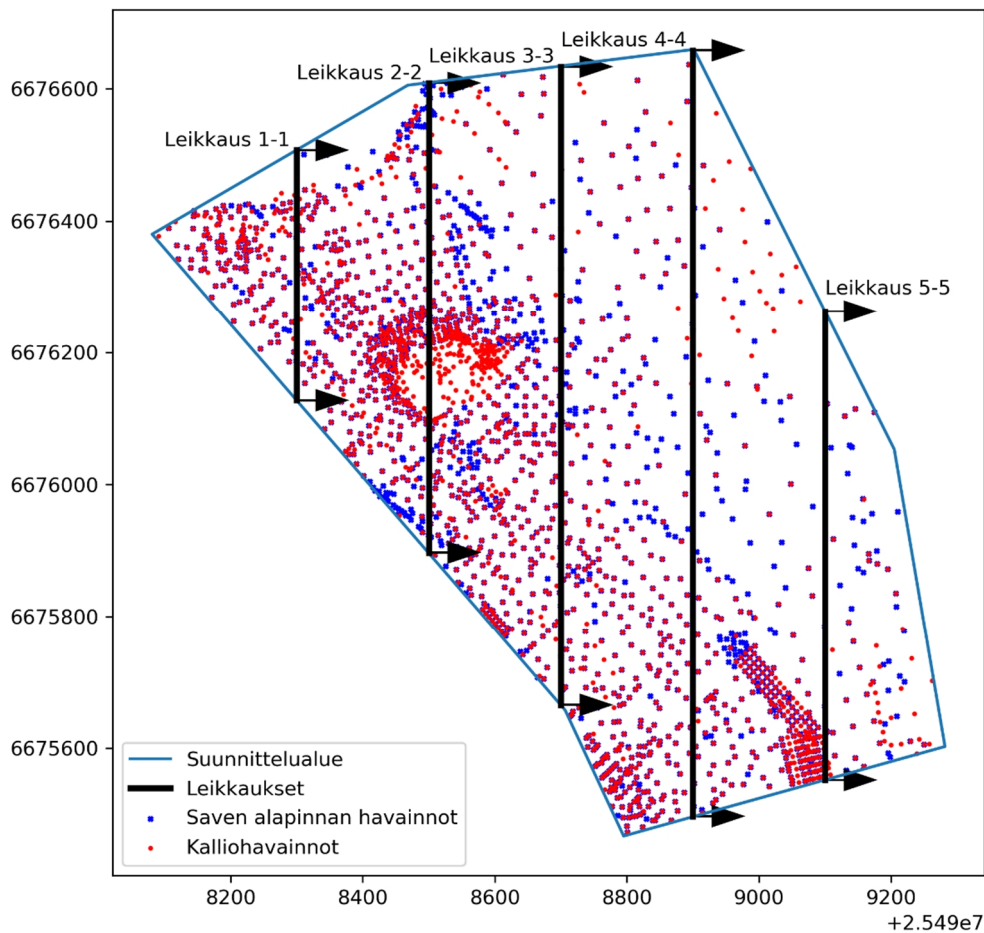
Kuva 50. Kyläsaari ja Hermanninranta. Kalliopinnan Kriging-keskiarvo (a) ja keskihajonta (b).

Kuvassa 51 on esitetty Krigingillä määritetty moreenin paksuus ja sen hajonta. Moreenin paksuus on leikattu kallon noustessa saven alapinnan yläpuolelle paksuuteen. Moreenin paksuus on suuri alueen luoteiskulmassa ja nolla alueen keskellä olevan Kyläsaaren kohdalla. Muuten alueella moreenin paksuus vaihtelee voimakkaasti. Moreenin paksuus on melko heikosti tunnettu alueen itäreunassa.

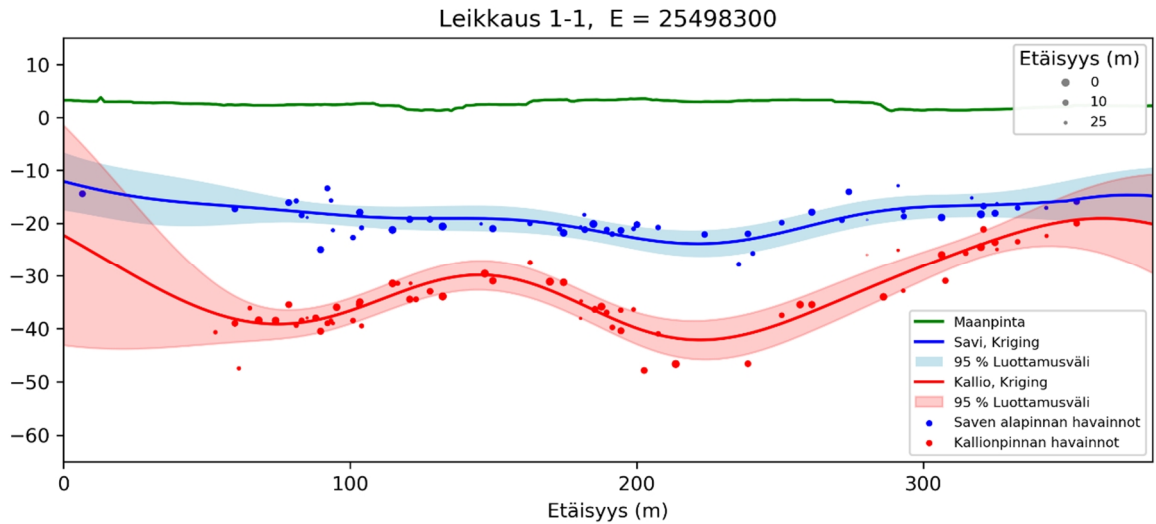


Kuva 51. Kyläsaari ja Hermanninranta. Moreenin paksuuden Kriging-keskiarvo (a) ja keskihajonta (b).

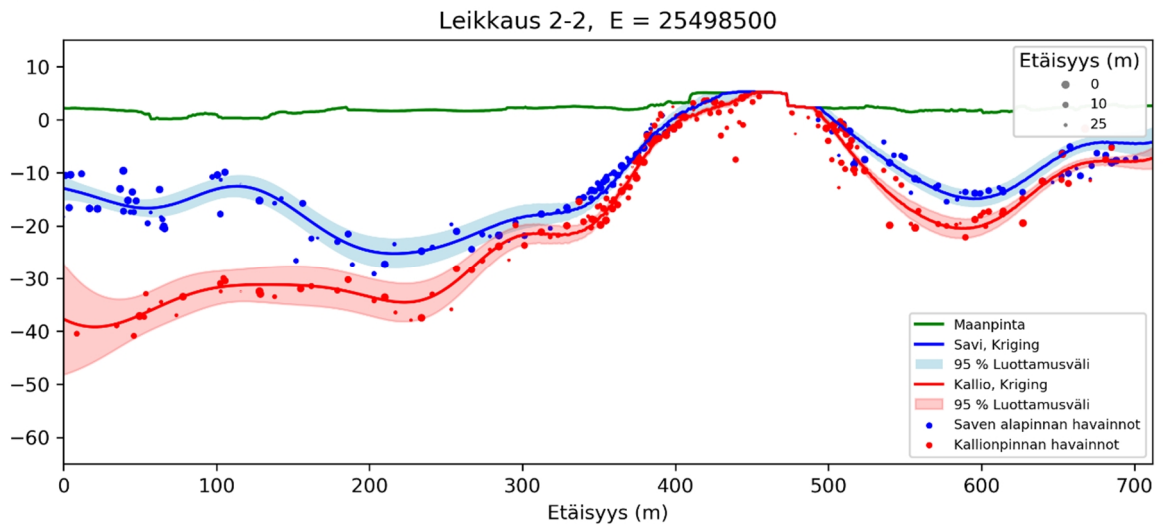
Seuraavaksi tarkastellaan leikkauksia Kriging-mallinnuksesta. Kuvassa 52 on esitetty leikkausten 1 – 5 sijainnit. Kuvissa 53-57 on esitetty kyseiset leikkaukset, joissa näkyy havainnot, interpolaatio ja sen epävarmuus. Kuvissa 53–57 on esitetty havaintopisteen etäisyys havaintopisteen koon avulla – mitä suurempi piste on, sitä lähempää leikkausta on havainto.



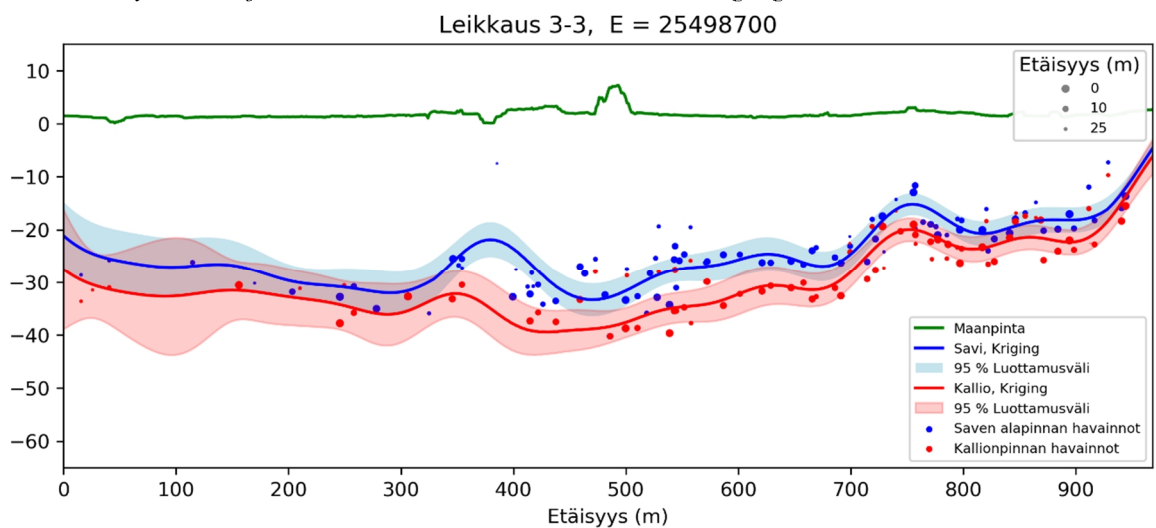
Kuva 52. Kyläsaari ja Hermanninranta. Alueelta tulostettuja leikkauksia.



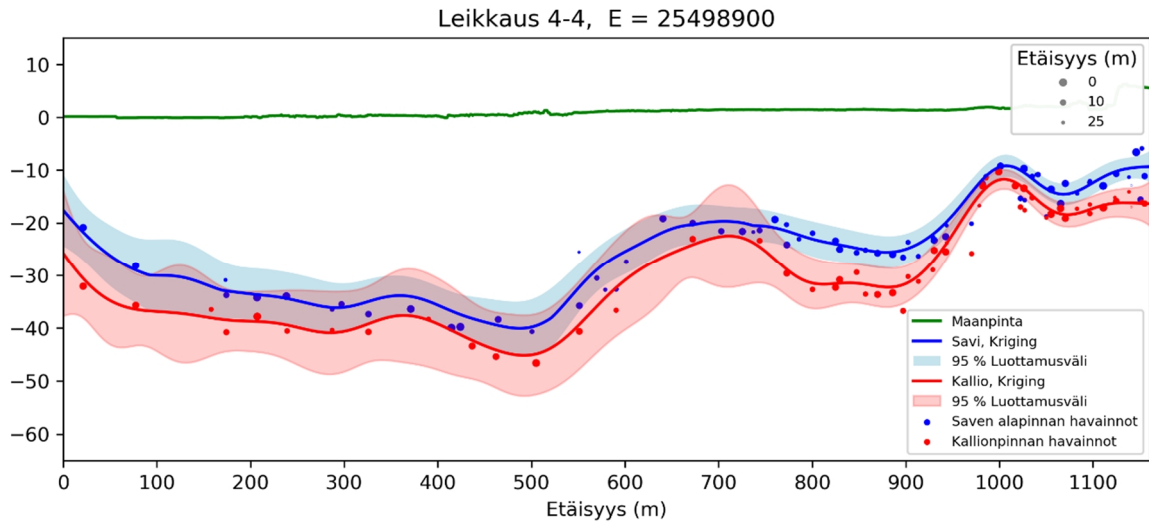
Kuva 53. Kyläsaari ja Hermanninranta. Leikkaus 1-1 Kriging-mallista. Kuvassa havainnon etäisyydet on esitetty pisteiden liukuvana kokona, lähempänä olevat pisteet on esitetty suurempana kuvan oikeassa yläkulmassa olevan mittakaavan mukaisesti. Vaaka-akselin etäisyys on leikkauksen pohjoispäästä.



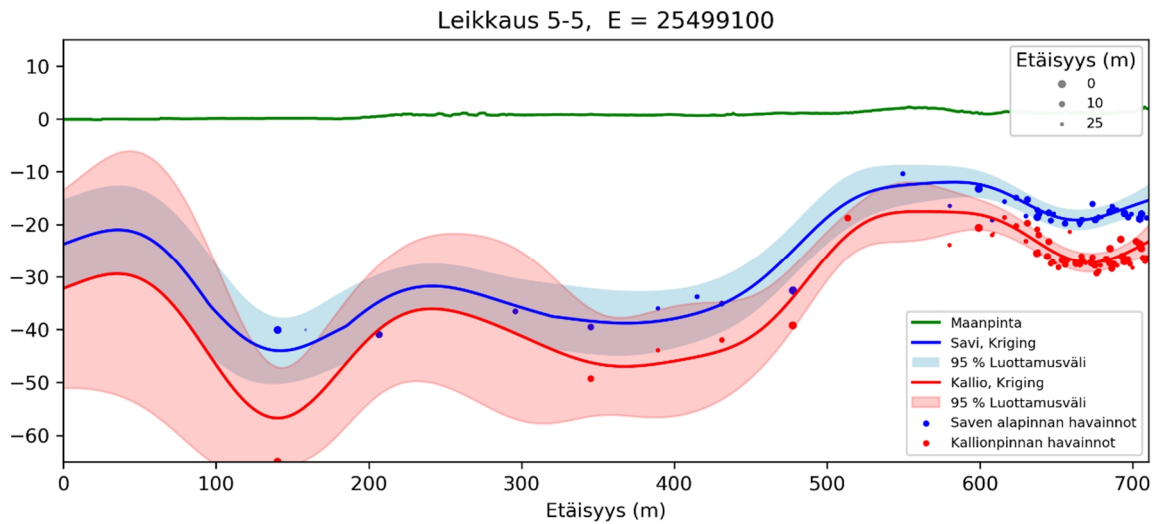
Kuva 54. Kyläsaari ja Hermanninranta. Leikkaus 2-2 Kriging-mallista.



Kuva 55. Kyläsaari ja Hermanninranta. Leikkaus 3-3 Kriging-mallista.



Kuva 56. Kyläsaari ja Hermanninranta. Leikkaus 4-4 Kriging-mallista.



Kuva 57. Kyläsaari ja Hermanninranta. Leikkaus 5-5 Kriging-mallista.

Pintojen spatiaalisen autokorrelaation neliöidyllä eksponenttifunktiolla mallinnetut parametrit on esitetty taulukossa 4. Tutkimuksessa ei analysoitu eri kovarianssifunktioita ja on mahdollista, että muut funktiot olisivat kuvanneet aineistoa paremmin. Tutkimuksessa myös oletettiin, että pinnat ovat isotrooppisia eli kovarianssifunktion parametrit ovat joka suunnassa yhtä suuret.

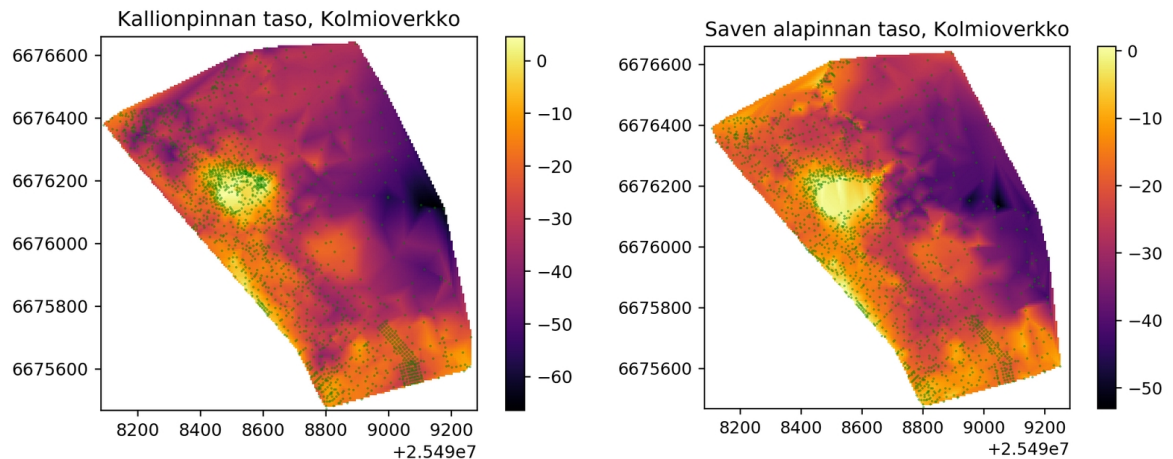
Taulukko 4. Kyläsaari ja Hermanninranta. Mallinnuksessa käytetyt kovarianssifunktion parametrit. Työssä kovarianssifunktiona käytetään neliöityä eksponenttifunktiota.

	Varianssi, σ^2	Pituusskaala, l
Kalliopinnan taso	191	52
Moreenin paksuus	32	47

Tutkimuksessa oletettiin kairausten virhe tunnetuksi ja se oletettiin lineaarisesti kasvavaksi syvyyden mukaan. Mallinnuksen onnistumisen kannalta tieto virheestä parantaa huomattavasti mallin luotettavuutta. On todennäköistä, että virhe ei täysin käyttäydy työssä esitettyjen kaavojen mukaan. Erityisesti systemaattisen virheen oletaminen nolaksi on kyseenalaista. Aiheesta ei kuitenkaan ole merkittävästi kirjallisuutta ja virheen numeerinen arvioiminen on haasteellista.

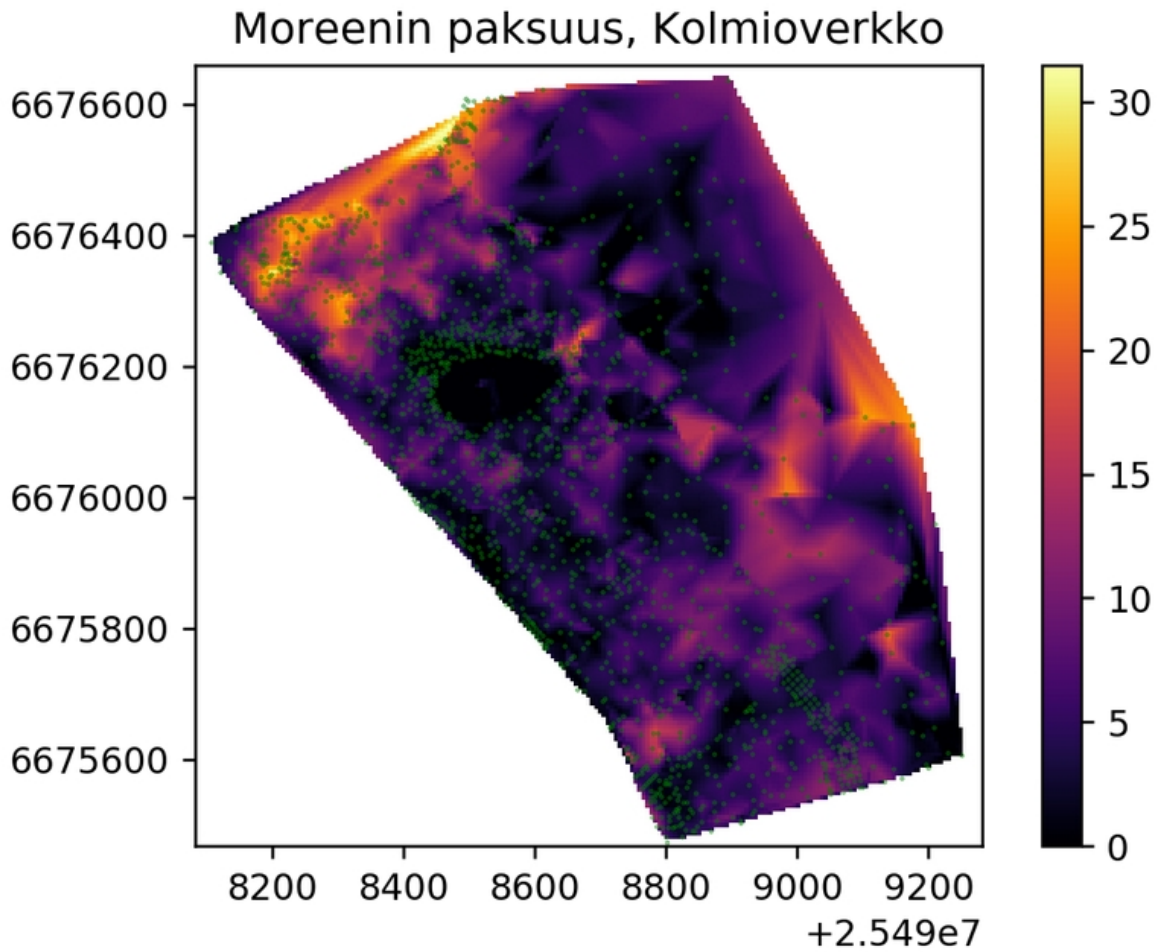
5.4.2 Vertailu kolmioverkkoon

Mallinnetaan alkuperäisen datan perusteella alueelle myös kalliopinnan ja saven alapinnan kolmioverkot. Kuvassa 58 on esitetty kalliopinnan ja saven alapinnan kolmioverkosta laskettu interpolaatio.

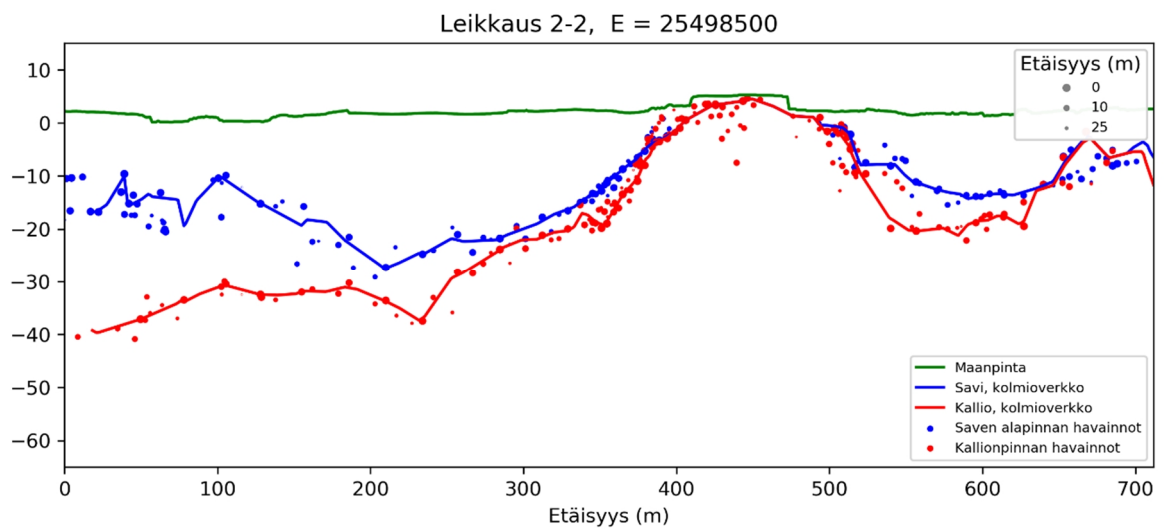


Kuva 58. Kyläsaari ja Hermanninranta. Kalliopinnan kolmioverkosta määritetty interpolointipinta (a) ja saven alapinnan kolmioverkosta määritetty interpolointipinta (b).

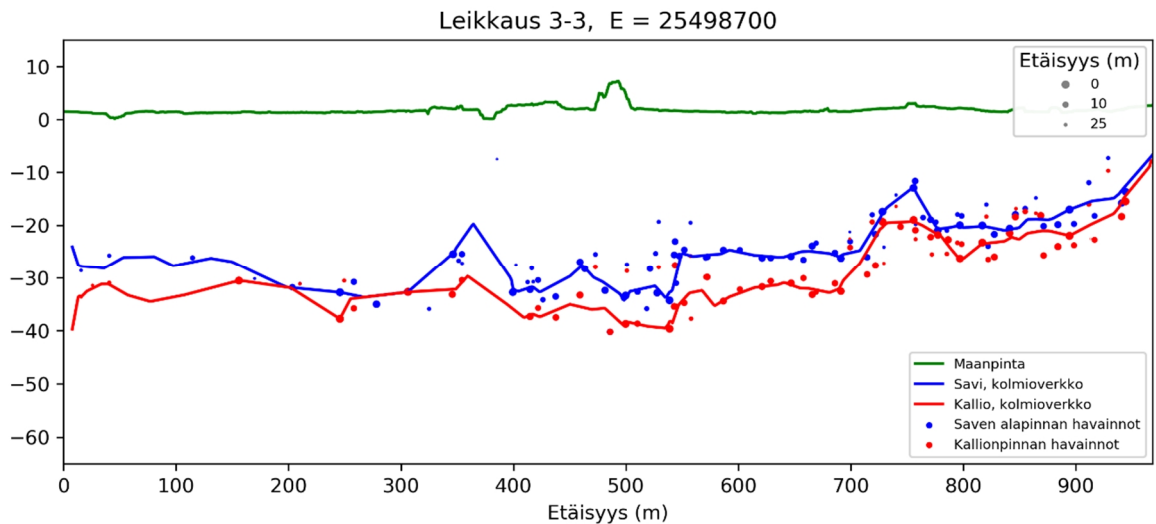
Lasketaan mallinnetuista kolmioverkoista erotus eli moreenin paksuus. Leikataan negatiiviset arvot nollaksi. Kuvassa 59 on esitetty kolmioverkkojen avulla laskettu moreenin paksuus. Tulostetaan kolmioverkoista leikkaukset 2-2 ja 5-5, joiden sijainti on esitetty kuvassa 52. Kuvissa 60, 61 ja 62 on esitetty kyseiset leikkaukset.



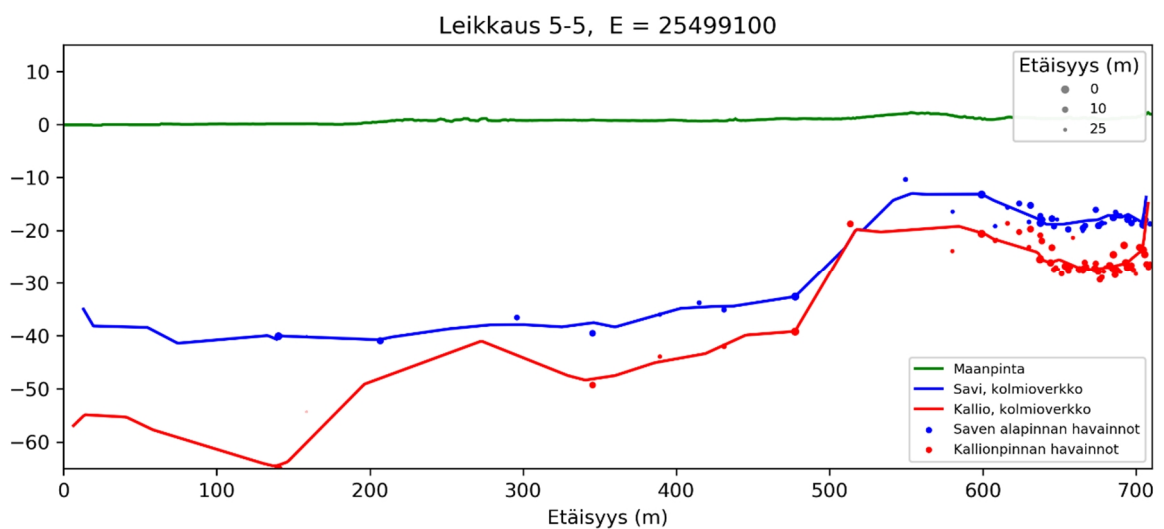
Kuva 59. Kyläsaari ja Hermanninranta. Kalliopinnan ja saven alapinnan kolmioverkkojen interpolaatioiden avulla laskettu moreenin paksuus.



Kuva 60. Kyläsaari ja Hermanninranta. Leikkaus 2-2 kolmioverkkomallista.



Kuva 61. Kyläsaari ja Hermanninranta. Leikkaus 3-3 kolmioverkkomallista.



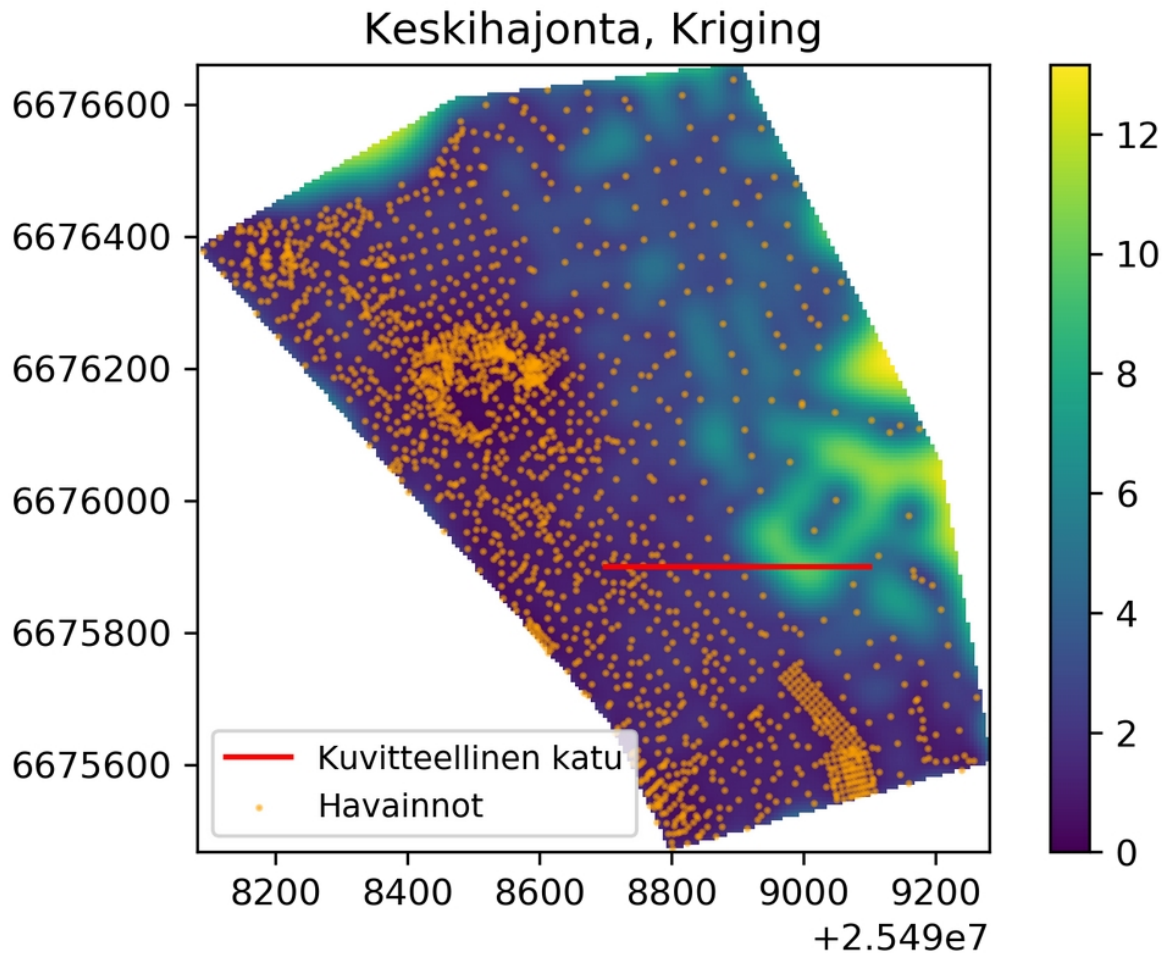
Kuva 62. Kyläsaari ja Hermanninranta. Leikkaus 5-5 kolmioverkkomallista.

Mallinnetut kolmioverkot ja niistä muodostetut interpolaatiot ovat selkeästi ongelmallisia. Pinnat tekevät hyvin jyrkkiä muutoksia johtuen vierekkäisten kolmioiden pienestä koosta. Tiheä pisteväli myös aiheuttaa epäluonnollisia muutoksia pinnoissa, kuten leikkauksen 2-2 eli kuvan 60 vasemmasta laidasta voidaan nähdä. Osa jyrkistä mielivaltaisilta vaikuttavista vaihteluista aiheutuu luonnollisesti myös siitä, että saven alapinnan määrittäminen luotettavasti pelkästä kairausdiagrammista on joissakin tapauksissa vaikeaa ja siten on mahdollista, että lähellä toisiaan sijaitsevilla kairauksilla saven alapinta on osin määritetty virheellisesti.

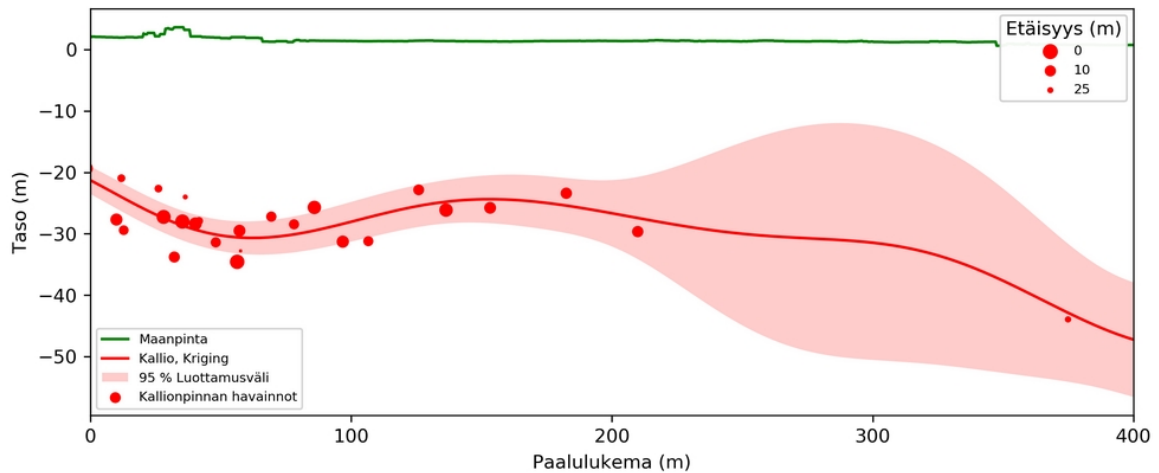
Leikkausten perusteella ei voida myöskään arvioida pinnan tason luotettavuutta. Leikkauksessa 5-5 eli kuvan 62 vasemmassa laidassa ei ole juurikaan havaintoja eikä pinnasta voida helpolla arvioida sen todenmukaisuutta. Samasta leikkauksesta Krigingillä muodostetusta pinnasta eli kuvasta 57 taas nähdään tiedon olevan hyvin epävarmaa.

5.4.3 Taloudellinen riski

Oletetaan suunniteltava kuvitteellinen katu alueelle kuvan 63 mukaiseen sijaintiin. Katu rakennetaan paalulaatalle ulottamalla teräsputkipaalut tasosta +0 kalliopinnan tasoon saakka. Alueen kalliopinnan Kriging-malli on osin melko epävarma, jolloin kadun rakentamiseen liittyy taloudellinen riski. Huonossa tapauksessa kalliopinta on oletettua syvemmällä, jolloin paalujen kustannukset kasvavat. Kadun pituus on 400 metriä ja se koostuu kalliopinnan tason suhteen suhteellisen varmasta osasta paaluvälillä 0–200 ja epävarmasta osasta paaluvälillä 200–400. Kuvassa 64 on esitetty suunnitellun kadun kohdalta pituusleikkaus, jossa on esitetty mallinnetun kalliopinnan Kriging-malli.

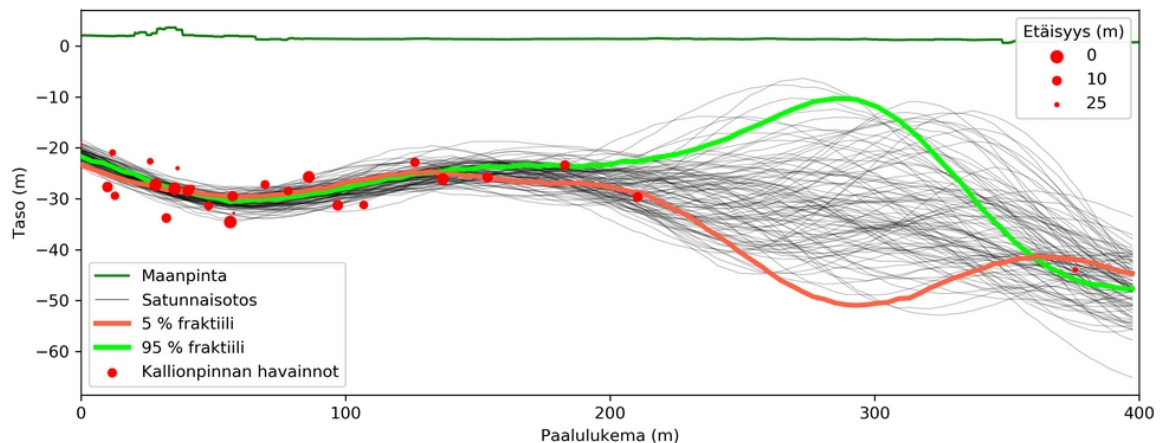


Kuva 63. Kyläsaari ja Hermanninranta. Kuvitteellisen paalulaatalle perustettavan kadun sijainti.

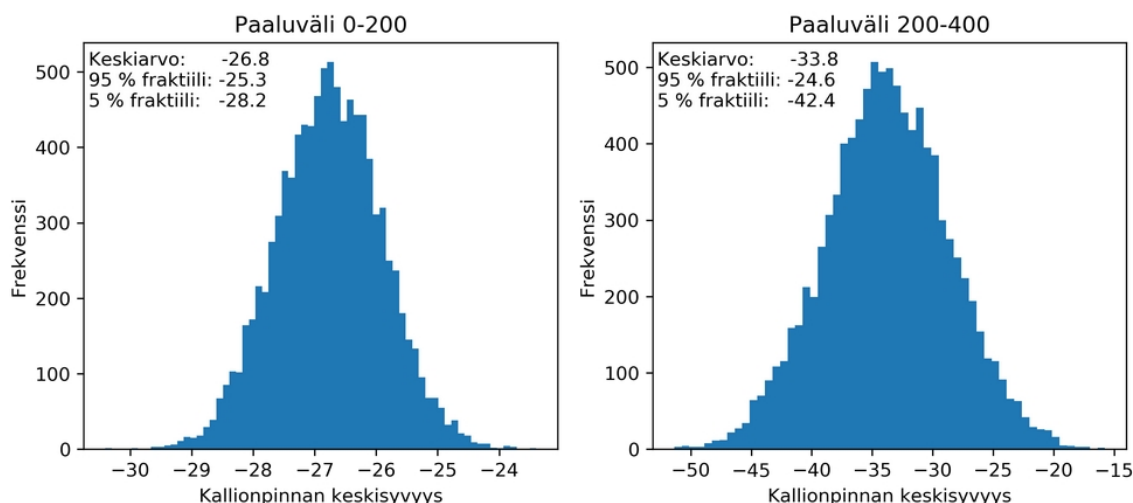


Kuva 64. Kyläsaari ja Hermanninranta. Suunnitellun kadun kohdalta pohjamaan pituusleikkaus, jossa on esitetty mallinnetun Kriging-kalliopinnan epävarmuus.

Kalliopinnan tulee toteuttaa mallinnuksessa määritetty spatiaalisen korrelaation ehto. Oteetaan Kriging-pinnasta 10000 ehdon toteuttavaa satunnaisotosta. Poistetaan satunnaisotoksista tapaukset, joissa kalliopinta leikkaa maanpinnan. Lasketaan jokaiselle satunnaisotokselle kalliopinnan tason keskiarvo. Kuvassa 65 on esitetty 100 satunnaisotosta, sekä 5 % ja 95 % fraktiilit kalliopinnan keskitasosta. Kuvassa 66 on esitetty kalliopinnan tasojen jakauma.



Kuva 65. Kyläsaari ja Hermanninranta. Kadun pohjamaan pituusleikkaukselle laskettuja satunnaisotoksia. Paksuilla viivoilla on esitetty satunnaisotoksille laskettujen keskisyytyksien 5 % ja 95 % fraktiilit.



Kuva 66. Kyläsaari ja Hermanninranta. Suunnittelun kadun paaluvälit 0-200 (vasen) ja 200-400 (oikea). Satunnaisotoksilla määritettyjen kalliopinnan keskisyvyysien jakauma.

Lasketaan yksinkertainen kustannuslaskelma kadun paalutukselle ja paalulaatalle. Paalulaatan leveys on 16 metriä, paalut ovat teräspalkkipaaluja joiden yksikköhinta on asennettuna 90 €/m ja k/k-väli on 2,5 metriä. Tällöin paaluja tulee yhteensä $6 \cdot 160 = 960$. Paalujen kustannukset riippuvat kallion keskisyvyydestä ja lasketaan paalujen määrä kerrottuna keskisyvyydellä ja yksikköhinnalla. Taulukossa 5 on esitetty paalujen keskipituudet. Taulukossa 6 on esitetty paalujen kustannusarviot keskipituuksien fraktiilien mukaan. Suotuista tapaus on 5 % fraktiili keskipituuksista ja epäsuotuista 95 %.

Taulukko 5. Kyläsaari ja Hermanninranta. Paalujen keskipituus fraktiilien ja todennäköisimmän vaihtoehdon mukaan.

Paalujen keskipituus, m	Paaluväli 0–200	Paaluväli 200–400	Koko katu
5 % fraktiili	28,2	42,4	35,3
Keskiarvo	26,3	33,8	30,1
95 % fraktiili	25,3	24,6	25,0

Taulukko 6. Kyläsaari ja Hermanninranta. Paalujen kustannukset eri tapausten mukaan.

Paalujen kustannukset, €	Paaluväli 0–200	Paaluväli 200–400	Koko katu
Epäsuotuista tapaus	1 218 240	1 831 680	3 049 920
Keskiarvo	1 136 160	1 460 160	2 596 320
Suotuista tapaus	1 092 960	1 062 720	2 155 680

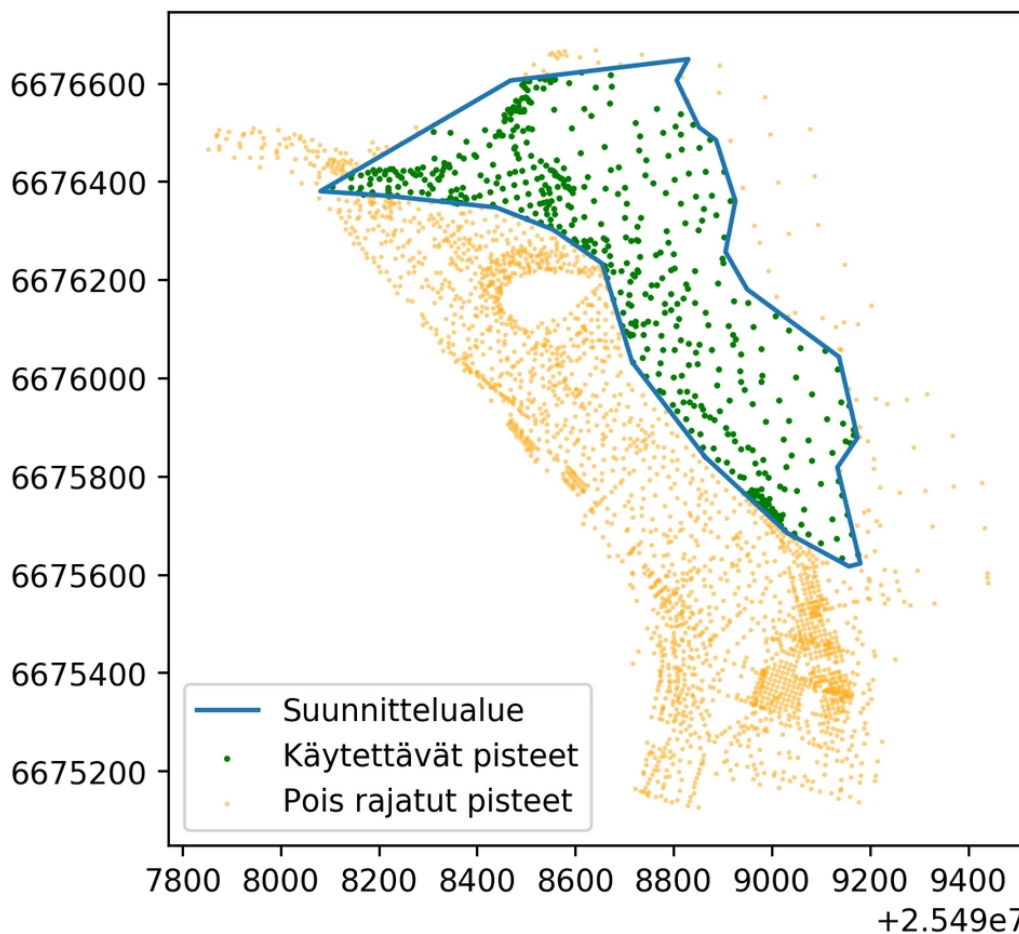
Taulukosta 6 huomataan paaluvälillä 0–200 taloudellisen riskin olevan suhteellisen matala. Kustannusten lisäys epäsuotuisassa tapauksessa verrattuna todennäköisimpään vaihtoehtoon on noin 80 000 €. Paaluvälillä 200–400 taas kustannusten lisäys vastaavasti on 370 000 €. Koko kadun kustannuslisäys on 95 % todennäköisyydellä alle 450 000 €.

Paalutuksen taloudellista riskiä pystytään pienentämään tekemällä lisää pohjatutkimuksia epävarmalla alueella. Tässä laskelmassa taloudellinen riski on riippuvainen vain Krigingin interpoloinnin epävarmuudesta. Optimaalisia pisteitä pohjatutkimuksille voidaan pyrkiä ohjelmoimaan optimointiongelmana, jossa minimointifunktio (*cost function*) on Kriging epävarmuuden integraali.

5.4.4 Lisäpohjatutkimusohjelma

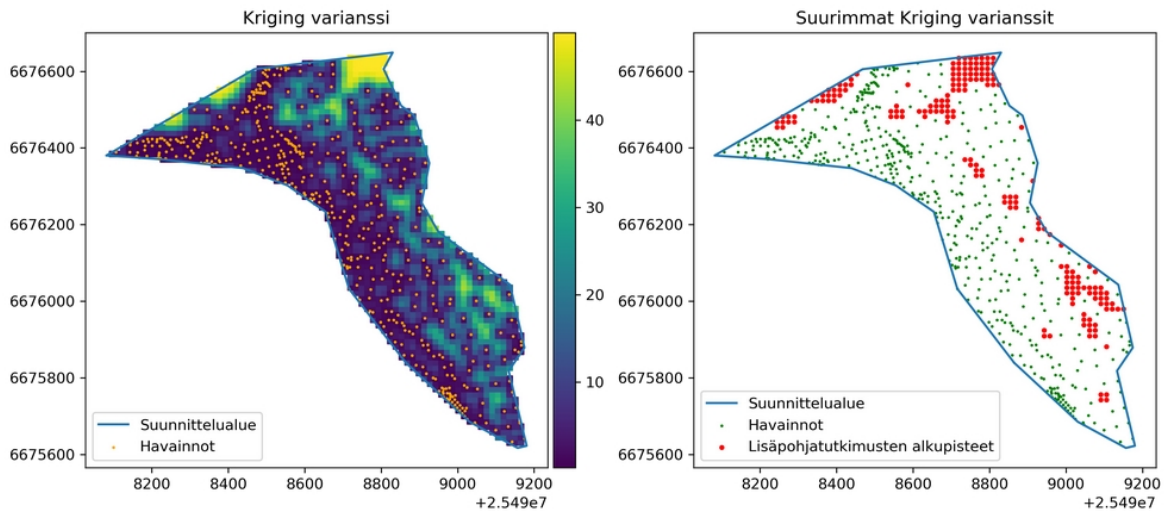
Kaavan 17 mukaan Kriging-mallinnuksen epävarmuuden laskemiseen ei tarvita havainnon arvoa, vaan pelkkä sijainti riittää. Tällöin voidaan merkitä uusia pohjatutkimuksia havaintojen joukkoon ja mallintaa uudesta havaintojoukosta Kriging-varianssi. Uudet pohjatutkimukset voidaan optimoida sijainnille, missä Kriging-varianssista laskettu integraali on mahdollisimman pieni. Määritellään tavoitteeksi se, että uusilla tutkimuksilla halutaan tarkentaa mallinnetun saven alapinnan tarkkuutta.

Uusille tutkimuksille ei tunneta syvyyttä, eikä virhettä voida määrittää kappaleen 4.2 mukaisesti. Oletetaan kairausten virheen keskihajonnan olevan tasan yksi metri syvyydestä riippumatta. Oletetaan alueen spatiaalisen autokorrelaation noudattavan neliöityä eksponenttifunktiota parametreilla varianssi $\sigma^2 = 50$ ja pituusskaala $l = 25$. Kuvassa 67 on esitetty rajattu alue, jolle uudet pohjatutkimukset halutaan kohdistaa. Käytetään laskennassa vain alueen sisällä olevia saven alapinnan havaintopisteitä.



Kuva 67. Kyläsaari ja Hermanninranta. Lisäpohjatutkimuksille rajattu alue, sekä niiden laskennassa käytettävät olemassa olevat pisteet.

Lasketaan rajatulle alueelle Kriging-varianssi määritetyllä kovarianssifunktiolla. Interpolaatiopisteet lasketaan ruudukolle 75·75, josta rajataan tarkastelualueen ulkopuoliset pisteet pois. Kuvassa 68a on esitetty pisteille laskettu Kriging-varianssi. Määritetään lisäpohjatutkimusten optimoinnin satunnaiset alkusijaintipisteet sijainteihin missä 10 % suurimmista Kriging-variansseista sijaitsee. Pisteet on esitetty kuvassa 68b.



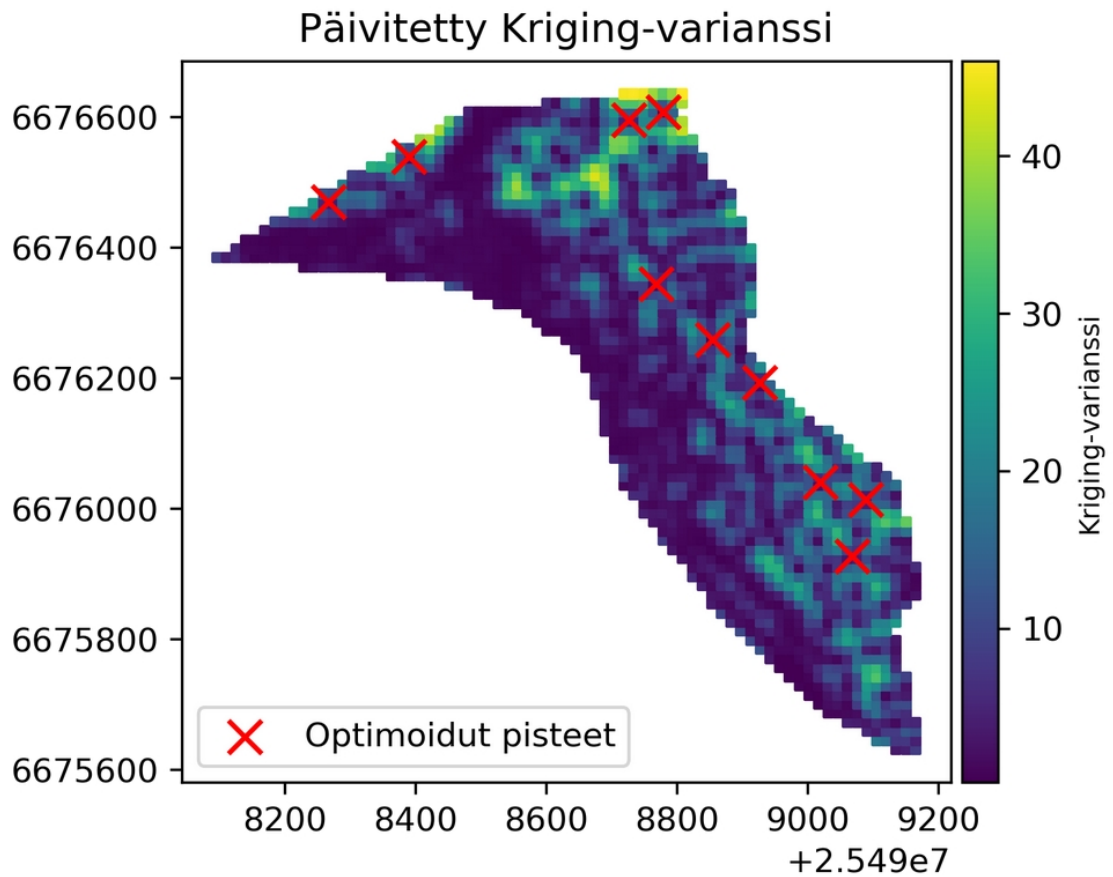
Kuva 68. Kyläsaari ja Hermanninranta. Alueen Kriging varianssi ilman lisäpohjatutkimuksia (a) ja sijainnit, joissa Kriging varianssi on suurimmillaan (b). Pisteitä, jossa Kriging-varienssi on suurimmillaan, käytetään lisäpohjatutkimusten määrittämisen alkupisteinä.

Määritetään optimointiongelma, jossa minimointifunktio (*cost function*) on alueen Kriging-varienssin integraali. Integraali lasketaan yksinkertaisesti laskentapisteiden summana. Minimointifunktio saa arvoina uusien pohjatutkimuspisteiden sijainnit ja näiden avulla saadaan laskettua alueelle päivitetty Kriging-varienssi. Määritetään funktioon 10 uutta lisäpohjatutkimuspistettä. Tällöin voidaan merkitä minimointifunktiota kaavan 25 mukaan.

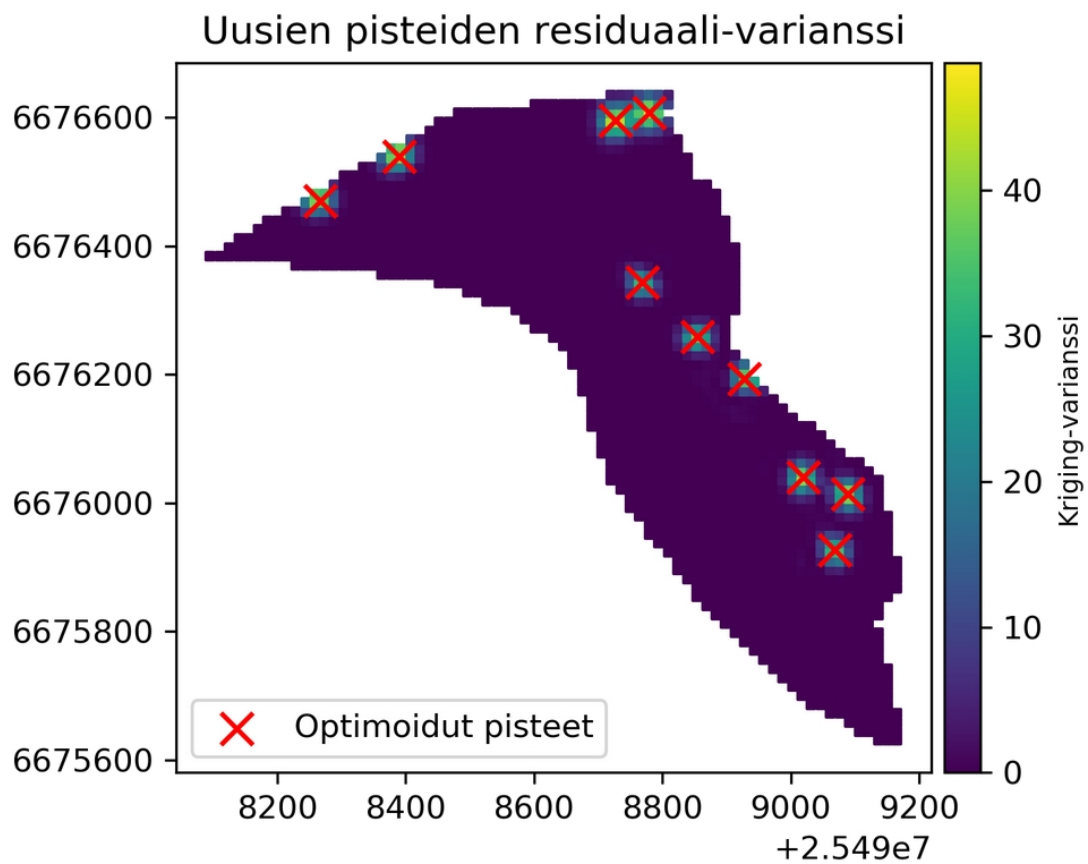
$$\begin{aligned}
 fmin(x_0 \dots x_{10}) &= \iint_{Alue} Krig_var(x_0 \dots x_{10}) dAlue \\
 &\approx \sum_{i=0}^{75} \sum_{j=0}^{75} Krig_var(x_0 \dots x_{10})_{i,j}, \text{ jos } piste_{i,j} \in Alue
 \end{aligned} \tag{25}$$

missä	$fmin$	minimointifunktio
	$Krig_var$	alueen Kriging-varienssi, joka on päivitetty uusilla pisteillä
	$x_0 \dots x_{10}$	uusien pohjatutkimusten pisteet
	i, j	interpolointipisteiden indeksit
	$piste_{i,j}$	interpolointipisteiden i, j koordinaatit
	$Alue$	tarkastelualue

Minimoidaan funktiota käyttämällä globaalin minimin etsimiseen tarkoitettua Basin-hopping-algoritmia, joka on stokastinen globaalin minimin etsimiseen tarkoitettu algoritmi (Wales & Doye, 1997). Algoritmin uudet pisteet kohdistetaan kuvan 68b mukaisiin kohtiin. Lokaalin minimin etsimiseen käytetään Powell-algoritmia. Laskentaan käytetään moduulia (SciPy, 2018). Globaalin minimin etsimiseen käytetään 100 Basin-hopping-iteraatiota ja lokaalin minimin etsimiseen noin 1000 iteraatiota eli yhteensä laskentaan tarvitaan noin 100 000 minimointifunktion laskentaa. Kuvassa 69a on esitetty uusilla pisteillä päivitetty Kriging-varienssi ja kuvassa 69b päivitetyn ja alkuperäisen Kriging-varienssin erotus eli residuaali-varienssi.

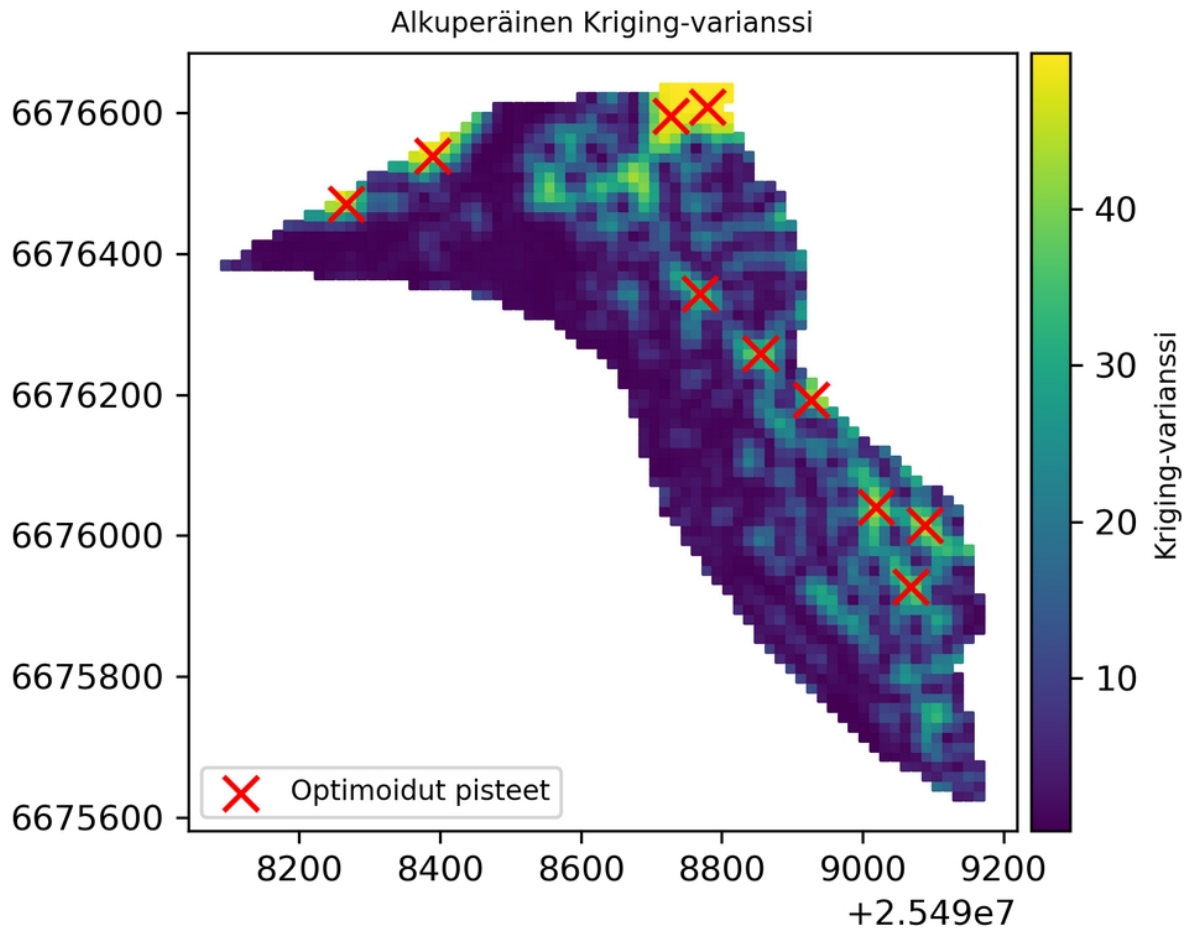


Kuva 69. Kyläsaari ja Hermanninranta. Uusilla pohjatutkimuksilla päivitetty Kriging-varianssi.

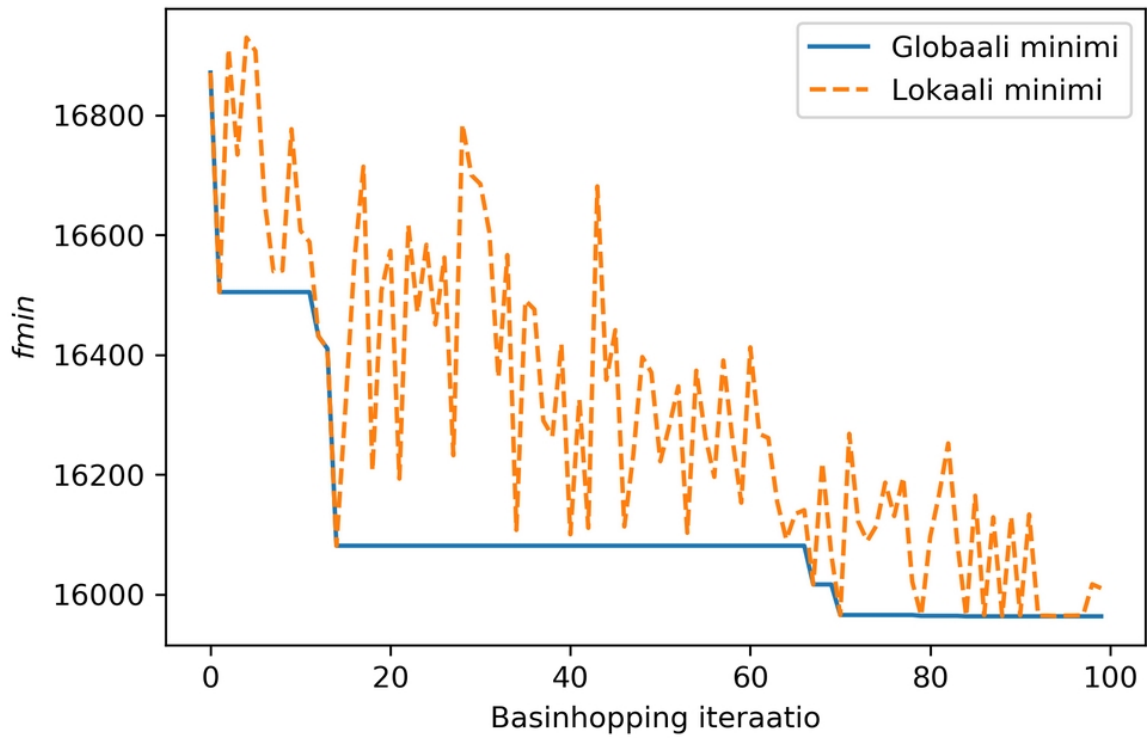


Kuva 70. Kyläsaari ja Hermanninranta. Alkuperäisen Kriging-varianssin ja uusilla optimoiduilla pisteillä päivitetyn Kriging-varianssin erotus eli residuaali-varianssi.

Kuvassa 71 on esitetty uusien pohjatutkimuspisteiden sijainti ja alkuperäinen Kriging-varianssi. Optimointi on silmämääräisesti katsoen onnistunut hyvin. Kuvassa 72 on esitetty globaalin minimin iteroinnin vaiheet. Kuvasta huomataan, että minimin etsimiseen on vaadittu monta iteraatiota ja välttämättä globaalia minimiä ei ole vielä 100 iteraatiolla löydetty. Globaalin minimin laskeminen vaatii huomattavat määrät laskentaa ja vastaaviin tuloksiin todennäköisesti päästäisiin arvioimalla pisteet silmämääräisesti suoraan Kriging-varianssin perusteella. Laskentaan tuo myös epätarkkuutta Kriging-varianssin integraalin laskennan tarkkuus. Tiheämmällä laskentapisteruudukolla yksittäisen laskennan tulokset olisivat tarkempia, mutta laskenta-aika kasvaisi nopeasti.



Kuva 71. Kyläsaari ja Hermanninranta. Uusien pohjatutkimusten optimoidut sijainnit ja alkuperäinen Kriging-varianssi.



Kuva 72. Kyläsaari ja Hermanninranta. Globaalin minimin etsimisen iteroinnin tulokset. Vaaka-akselilla Basinhopping iteraation vaihe ja pystyakselilla minimointifunktion arvo. Katkoviiva esittää lokaalin minimin etsimiseen käytetyn Powell-algoritmin löytämää arvoa.

6 Yhteenveto ja johtopäätökset

Krigingillä saadaan muodostettua parempia maaperämalleja verrattuna kolmioverkkoon. Mallinnuksessa voidaan hyödyntää tietoa spatiaalisesta autokorrelaatiosta ja hyödyntää koko aineistoa muodostettaessa jatkuvaa interpolointipintaa. Krigingillä voidaan myös helpommin huomioida muiden pintojen vaikutus mallinnettavan pinnan kulkuun. Esimerkiksi saven alapinnan pisteitä voidaan hyödyntää mallinnuksessa myös kalliopintaa mallinnettaessa.

Lineaariseen pintaan verrattuna Krigingillä saadaan parempia interpolointipintoja, jolloin pohjatutkimuksissa on mahdollista saavuttaa kustannussäästöjä. Paremmat interpolointipinnat antavat myös parempia tuloksia sen käyttökohteissa. Tällaisia kohteita ovat esimerkiksi painuma- ja stabiliteettilaskelmat, kustannuslaskelmat ja muut pohjarakentamiseen geotekniset liittyvät laskelmat ja pohjarakennussuunnitelmat.

Luonnossa esiintyvät pinnat ovat muodostuneet pitkän ajan kuluessa erilaisissa geologisissa prosesseissa. Geologiset prosessit muodostavat harvoin sellaisia tasaisia pintoja, joita voitaisiin mallintaa lineaarisina tasoina. Kriging tarjoaa mahdollisuuden arvioida geologisten prosessien vaikutusta pintojen mallintamiseen. Geologisella ammattitaidolla voidaan arvioida eri pintojen vaikutusta toisiinsa ja näin pyrkiä parantamaan maaperämallia.

Kairauksilla selvitettyt kalliopinnan pisteet, sekä erityisesti kairauksista tulkitut maakerrosrajat eivät ole yleensä tarkkoja. Kairauksiin liittyy useita virhelähteitä, jotka saattavat muuttaa tulosta merkittävästi. Käytettäessä kehittyneempiä interpolointimenetelmiä, kuten Krigingiä, voidaan kairausten virheet ottaa paremmin huomioon.

Krigingillä saadaan muodostettua interpolointipinnalle epävarmuus, jota voidaan hyödyntää maaperän mallinnuksessa. Maaperämallista voidaan rajata pois alueet, joissa ei ole riittävästi tietoa laadukkaasti arvion tekemiseen. Laadittava maaperämalli voidaan myös ulottaa havaintopisteiden ulkopuolelle, toisin kuin kolmioverkkoa käytettäessä. Kriging ei kuitenkaan anna erityisen hyviä tuloksia ekstrapoloitaessa.

Epävarmuuden mallintamisella on useita sovelluksia geotekniikassa. Epävarmuutta voidaan hyödyntää esimerkiksi taloudellisen riskin arvioinnissa, riskiperusteisessa suunnittelussa, lisäpohjatutkimusten ohjelmoinnissa ja tekemisessä sekä maaperämallin luotettavuutta arvioitaessa. Taloudellisen riskin arvioimisessa voidaan arvioida kustannuksia esimerkiksi paalutukselle, massanvaihdolle, syvästabiloinnille ja tukiseinälle. Riskiperusteisella suunnittelulla laskennallista epävarmuutta voidaan hyödyntää esimerkiksi stabiliteetti- ja painumalaskelmissa.

Geotekniikassa usein käytetään lähimmän naapurin interpolointia määritettäessä maaperän lujuus- tai painumaominaisuuksia laskelmia varten. Maaperä kuitenkin saattaa olla hyvin nopeastikin vaihtelevaa, jolloin lähin pohjatutkimus ei välttämättä anna hyvää arviota maaperän lujuusominaisuuksista. Maaperän ominaisuuksien interpolointia kolmiulotteisesti ja interpoloinnin hyödyntämistä laskelmissa olisi syytä tutkia tarkemmin. Myös maaperän ominaisuuksien ja kerrosrajojen autokorrelaatio tulee selvittää tarkemmin, jotta mallinnusta voidaan tehdä alustavasti ennakkoon tiedetyillä kovarianssifunktion parametreilla.

Kairauksilla ja muilla pohjatutkimuksilla tehtyjä mittauksia, sekä niistä tehtyjä tulkintoja olisi syytä tutkia enemmän. Pohjatutkimukset tarjoavat lähtötiedon maakerrosrajojen, kalliopinnan sijainnin tai maaperän ominaisuuksien arvioimiseksi. Tutkimuksiin liittyvä systemaattinen ja satunnainen virhe tulee tutkia tarkemmin, jotta virhettä voidaan hyödyntää mal-

linnuksessa. Virhe voitaisiin selvittää jokaiselle pohjatutkimusmenetelmälle ja muille luokitteluille esimerkiksi päättymistavan tai kairauskoneen luotettavuuden perusteella. Luokittelussa voitaisiin myös hyödyntää kaikkea saatavilla olevaa raakadataa. Olisi myös syytä tarkastella onko pohjatutkimusten tallentamiseen käytettävää Infraformaattia mahdollista parantaa virheen laskennallista selvittämistä varten.

Kriging-mallinnuksen tekeminen on geotekniikan alalla yleisesti käytettävillä ohjelmilla haastavaa. Tässä työssä havaittiin parhaan mahdollisuuden mallintamiseen antaa ohjelma Autodesk Civil 3D, jolla pystytään tarkentamaan luotuja kolmioverkkoja kehittyneemmällä interpolointimenetelmällä. Kehittyneempien mallinnusmenetelmien tulisi olla helpommin hyödynnettävissä geotekniikassa käytetyillä työkaluilla. Myös mallinnuksen vaiheita olisi syytä tutkia tarkemmin ja vaiheistuksesta tulisi laatia ohjeita parhaan tuloksen saavuttamiseksi.

Lähdeluettelo

Altun, S., A. G. B. & Alper, S., 2013. Geostatistical interpolation for modelling SPT data in northern Izmir. *Sadhana*, 38(6), p. 1451–1468.

ArcMap, 2018. ArcMapin kotisivut. Www-sivut. Saatavilla: <http://desktop.arcgis.com/en/arcmap/> [Haettu 28.7.2018].

Autodesk, 2018. Civil 3D Kriging ohjeet. Www-sivut. Saatavilla: <https://knowledge.autodesk.com/guidref/CIV3D/2017/learn-explore/GUID-EE4C1260-1384-42BE-969B-8C0FDCA0CB2C> [Haettu 28.7.2018].

Basarir, H., Kumral, M., Karpuz, C. & Tutluoglu, L., 2010. Geostatistical modeling of spatial variability of SPT data for a borax stockpile site. *Engineering Geology*, Vol 114, s. 154-163.

Baveye, P. & Laba, M., 2015. Moving away from the geostatistical lamppost: Why, where, and how does the spatial heterogeneity of soils matter?. *Ecological Modelling*, Vol 298, s. 24-38.

Brotherus, V., 2014. Inframallintamisen hyödyntäminen geoteknisessä suunnittelussa. Diplomityö. Oulun yliopisto, ympäristötekniikan koulutusohjelma. Oulu. 107+6 s.

Chilés, 2012. *Geostatistics Modeling spatial Uncertainty*. 2nd. John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey. 699 s. ISBN 978-0-470-18315-1.

Clayton, C., 2001. Managing geotechnical risk: time for a change?. *Proc. ICE, Geotechnical Engineering*, Vol. 149, s. 3-11.

Davis, J. C., 2002. *Statistics and data analysis in geology*. 3rd. John Wiley & Sons. ISBN 0-471-17275-8.

Eteläsaari, A., 2017. Tietomallin hyödyntäminen tien painumalaskennassa. Diplomityö. Aalto-yliopisto, pohja- ja kalliorakentaminen. Espoo. 109+71 s.

ezdxf, 2018. ezdxf github. Www-sivut. Saatavilla: <https://github.com/mozman/ezdxf> [Haettu 25.8.2018].

GPy, 2018. GPy github. Www-sivut. Saatavilla: <https://github.com/SheffieldML> [Haettu 28.7.2018].

Helsinki, 2018. Karttapalvelu. Www-sivut. Saatavilla: <http://kartta.hel.fi/> [Haettu 24.8.2018].

Hohn, M., 1999. *Geostatistics and petroleum geology*. 2nd. Springer Science+Business Media. ISBN 978-94-010-5901-5.

Jaksa, M.B. & Goldsworthy, J.S. & Fenton, G.A. & Kaggwa, W.S. & Griffiths, D.V. & Kuo, Y.I. & Poulos, H.G. 2005. Towards reliable and effective site investigations. *Geotechnique*, vol. 55, s. 109-121. ISSN 0016-8505.

Jääskeläinen, R., 2009. *Geotekniikan perusteet*. 1. painos. Tammertekniikka, Jyväskylä. 332 s. ISBN 978-952-5491-50-0.

- Korkiala-Tanttu, L. & Löfman, M., 2016. Luotettavuuden arviointi ja riskienhallinta geoteknisessä suunnittelussa. Liikennevirasto. Helsinki, Suomi. ISBN 978-952-317-318-7.
- Matplotlib, 2018. Matplotlib kotisivut. Www-sivut. Saatavilla: <https://matplotlib.org/> [Haettu 25.7.2018].
- Murphy, K. P., 2012. Machine learning, a probabilistic perspective. The MIT Press. ISBN 978-0-262-01802-9.
- Lehtinen, M., Nurmi, P., Rämö, T. 1998. *Suomen kallioperä – 3 000 vuosimiljoonaa*. Suomen Geologinen Seura ry, Helsinki. ISBN 952-90-9260-1.
- Numpy, 2018. Numpy kotisivut. Www-sivut. Saatavilla: <http://www.numpy.org/> [Haettu 5.7.2018].
- Python, 2018. Python kotisivut. Www-sivut. Saatavilla: <https://www.python.org/about/> [Haettu 6.7.2018].
- Ramboll Finland Oy. 2017. Rakennettavuusselvitys. Kyläsaari - Hermannin ranta, maaperän rakennettavuuden vaikutus kaavatalouteen. Tilaaja Helsingin kaupunki.
- Rasmussen, C. E. & Williams, C. K. I., 2006. Gaussian Processes for Machine Learning. The MIT Press. ISBN 0-262-18253-X.
- SciPy, 2018. SciPy kotisivut. Www-sivut. Saatavilla: <https://www.scipy.org/> [Haettu 26.7.2018].
- Seaborn, 2018. Seaborn kotisivut. Www-sivut. Saatavilla: <https://seaborn.pydata.org/> [Haettu 25.7.2018].
- Suomen geoteknillinen yhdistys SGY, 1981. Kairausopas I: Painokairaus, tärykairaus & heijarikairaus. Rakentajain kustannus Oy. Helsinki, ISBN 951-676-1275.
- Suomen geoteknillinen yhdistys SGY, 1986. Kairausopas V: Porakonekairaus. Rakentajain kustannus Oy. Helsinki. ISBN 951-676-315-4.
- Suomen geoteknillinen yhdistys SGY, 2001. Kairausopas VI: CPTU/puristinkairaus & puristinheijarikairaus. Rakentajain kustannus Oy. Helsinki. ISBN 951-676-1275.
- Sitharam, T. G. & Samui, P., 2007. Geostatistical modelling of spatial and depth variability of SPT data for Bangalore. Geomechanics and Geoengineering: An International Journal, 2(4), s. 307-316.
- Soulie, M., Monter, P. & Silvestri, V., 1990. Modeling spatial variability of soil parameters. Canadian Geotechnical Journal, vol. 27(5), s. 617-630.
- Tanttu, K., 2015. Kallionpintamallin luotettavuuden analysointi porakonekairausten määrän ja laadun perusteella. Diplomityö. Aalto yliopisto, pohjarakennus ja maamekaniikka. Espoo. 68+17 s.
- Tobler, W. R., 1970. A computer movie simulating urban growth in the detroit region. Economic Geography, vol 46, s. 234-240.

Wales, D. & Doye, J., 1997. Global optimization by basin-hopping and the lowest energy structures of Lennard-Jones clusters containing up to 110 atoms. *Journal of Physical Chemistry A*, vol 101, s. 5111-5116.

Wang, C. & Zhu, H., 2015. Combination of Kriging methods and multi-fractal analysis for estimating spatial distribution of geotechnical parameters. *Bulletin of Engineering Geology and the Environment*, vol 75, s. 413-423.

Webster, R. & A., O. M., 2007. *Geostatistics for Environmental Scientists*. 2nd. John Wiley & Sons. ISBN: 978-0-470-02858-2.